Няколко спомена от последните години

1. Нека $\mathcal{L}$ е предикатният език без формално равенство и единствен нелогически символ — P, двуместен предикатен символ. Нека $\mathcal{A} = \langle C, P^{\mathcal{A}} \rangle$, където C е множеството на всички окръжности (с ненулев радиус) в евклидовата равнина, а

$$P^{\mathcal{A}} = \{(c_1, c_2) \mid c_1, c_2 \in C \text{ и } c_1 \text{ е вътрешно допирателна за } c_2\}.$$

Напишете такава формула от $\mathcal{L}$, че:

а) $\mathcal{A} \models \varphi_{=}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато $c_1 = c_2$;

б) $\mathcal{A} \models \varphi_{NTPP}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато c_1 е във вътрешността на кръга, определен от c_2, и окръжностите c_1, c_2 нямат общи точки;

в) $\mathcal{A} \models \varphi_{PP}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато кръгът, определен от c_1, е собствено подмножество на кръга, определен от c_2;

г) $\mathcal{A} \models \varphi_{PO}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато c_1 и c_2 имат точно две общи точки;

д) $\mathcal{A} \models \varphi_{EC}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато c_1 и c_2 са външно допирателни;

е) $\mathcal{A} \models \varphi_{DC}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато затворените кръгове, определени от c_1 и c_2 нямат общи точки.

2. Нека $\mathcal{L}$ е предикатният език без формално равенство и единствен нелогически символ — P, двуместен предикатен символ. Нека $\mathcal{A} = \langle C, P^{\mathcal{A}} \rangle$, където C е множеството на всички окръжности (с ненулев радиус) в евклидовата равнина, а

$$P^{\mathcal{A}} = \{(c_1, c_2) \mid c_1, c_2 \in C,\ c_1 \text{ лежи във вътрешността на } c_2 \text{ и нямат общи точки}\}.$$

Напишете такава формула от $\mathcal{L}$, че:

а) $\mathcal{A} \models \varphi_{=}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато $c_1 = c_2$;

б) $\mathcal{A} \models \varphi_{PP}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато кръгът, определен от c_1, е собствено подмножество на кръга, определен от c_2;

в) $\mathcal{A} \models \varphi_{TPP}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато c_1 е вътрешно допирателна за c_2;

г) $\mathcal{A} \models \varphi_{PO}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато c_1 и c_2 имат точно две общи точки;

д) $\mathcal{A} \models \varphi_{EC}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато c_1 и c_2 са външно допирателни;

е) $\mathcal{A} \models \varphi_{DC}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато затворените кръгове, определени от c_1 и c_2 нямат общи точки.

3. Нека $\mathcal{L}$ е предикатният език без формално равенство и единствен нелогически символ — P, двуместен предикатен символ. Нека $\mathcal{A} = \langle C, P^{\mathcal{A}} \rangle$, където C е множеството на всички окръжности (с ненулев радиус) в евклидовата равнина, а

$$P^{\mathcal{A}} = \{(c_1, c_2) \mid c_1, c_2 \in C \text{ и } c_1 \text{ е външно допирателна за } c_2\}.$$

Напишете такава формула от $\mathcal{L}$, че:

а) $\mathcal{A} \models \varphi_{=}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато $c_1 = c_2$;

б) $\mathcal{A} \models \varphi_{NTPP}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато c_1 е във вътрешността на кръга, определен от c_2, и окръжностите c_1, c_2 нямат общи точки;

в) $\mathcal{A} \models \varphi_{TPP}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато c_1 е вътрешно допирателна за c_2;

г) $\mathcal{A} \models \varphi_{PP}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато кръгът, определен от c_1, е собствено подмножество на кръга, определен от c_2;

д) $\mathcal{A} \models \varphi_{PO}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато c_1 и c_2 имат точно две общи точки;

е) $\mathcal{A} \models \varphi_{DC}[c_1, c_2]$ точно тогава, когато затворените кръгове, определени от c_1 и c_2 нямат общи точки.

3. Нека $\mathcal{L}$ е предикатният език с формално равенство и единствен нелогически символ — f, двуместен фунционален символ. Нека $\mathcal{A} = \langle \omega, + \rangle$, където ω е множеството на естествените числа.

а) Докажете, че функцията h, $h : \omega \to \omega$, $h(n) = 3n^2 + 4$ не е термално определима в $\mathcal{A}$.

б) Покажете, че графиката на g, $g : \omega \to \omega$, $g(n) = 3n + 4$ е определима в $\mathcal{A}$ с формула от $\mathcal{L}$.

4. Докажете, че формулата $\exists x \forall y (p(x, y) \iff \neg \exists z (p(y, z) \,\&\, p(z, y)))$, където p е двуместен предикатен символ, е неизпълнима.

5. С метода на резолюцията докажете, че множеството от предикатни дизюнкти

$\{p(a, x, f(y)), p(a, z, f(g(b))), \neg q(y, z)\}$, $\{\neg q(g(b), w), r(w, a)\}$,
$\{\neg p(a, w, f(g(b))), r(x, a)\}$, $\{p(a, u, f(g(u))), r(u, a), q(g(b), b)\}$,
$\{\neg r(v, a)\}$

е неизпълнимо. (a и b са различни индивидни константи, f и g са едноместни функционални символи, p, q и r са предикатни символи с арности съответно 3, 2, 2; x, y, z, u, v и w са различни индивидни променливи).

Задача 1. Да се дефинира на Пролог двуместен предикат с аргументи X и Y, който по даден списък X от списъци генерира при преудовлетворяване в Y елементите на декартовото произведение на елементите на X. Например, ако X е $[L_1, L_2, L_3, L_4]$, елементите на декартовото произведение на елементите на X са списъците от вида $[a_1, a_2, a_3, a_4]$, където за всяко i, $1 \le i \le 4$, a_i е елемент на L_i.

Задача 2. Да се дефинира на Пролог двуместен предикат, който по дадени две цели числа разпознава дали те имат едни и същи прости делители.

1. Опишете представяне на неориентиран граф. Напишете програма на Пролог, която по даден неориентиран граф разпознава дали той е свързан и ацикличен.

2. Нека $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ за всяко естествено число n и $a_1 = a_0 = 1$. Нека $b_{n+2} = (-1)^{n+1}3b_{n+1} + (-1)^n b_n$ за всяко естествено число n и $b_1 = b_0 = 1$. Да се напише програма на Пролог, която по дадено естествено число n намира най-малкото естествено число k, за което $b_k \le a_n < b_{k+1}$, ако има такова k, и -1 в противен случай.

Задача 1. Казваме, че крайна редица от числа $[a_1, \dots, a_n]$ е сегментна, ако съществува такава подредица $[a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}]$, където $1 \le n_1 < n_2 < \dots < n_k \le n$, че $a_{n_1} < a_{n_2} < \dots < a_{n_k}$ и $\exists c \forall i (0 < i < n \,\&\, a_i > a_{i+1} \implies a_{i+1} = c \,\&\, \exists j (i = n_j))$. Да се дефинира на пролог предикат $p(L)$, който по даден списък от числа L проверява дали той задава сегментна редица.

Задача 2. Ако E е списък от списъци с дължина 2, да означим с $G(E)$ ориентирания граф, в който няма изолирани върхове и от върха u към върха v има ребро точно тогава, когато $[u, v]$ е елемент на списъка E. Да се дефинира на пролог предикат $p(E, v)$, който по даден списък от двуелементни списъци E и връх v на графа $G(E)$ проверява дали в $G(E)$ има цикъл, преминаващ през v.

Задача 1. Казваме, че крайна редица от числа $[a_1, \dots, a_n]$ е сегментна, ако съществува такава подредица $[a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}]$, където $1 \le n_1 < n_2 < \dots < n_k \le n$, че $a_{n_1} < a_{n_2} < \dots < a_{n_k}$ и $\exists c \forall i (0 < i < n \,\&\, a_i > a_{i+1} \implies a_i = c \,\&\, \exists j (i + 1 = n_j))$. Да се дефинира на пролог предикат $p(L)$, който по даден списък от числа L проверява дали той задава сегментна редица.

Задача 2. Ако E е списък от списъци с дължина 2, да означим с $G(E)$ ориентирания граф, в който няма изолирани върхове и от върха u към върха v има ребро точно тогава, когато $[u, v]$ е елемент на списъка E. Да се дефинира на пролог предикат $p(E, n, u, v)$, който по даден списък от двуелементни списъци E, естествено число n и върхове u и v от графа $G(E)$ проверява дали в $G(E)$ има път от u до v с дължина не по-голяма от n.

Задача 1. Да се докаже, че множеството, съдържащо само следните три формули, е изпълнимо:

$\forall x \forall y \forall z (p(x, y) \implies \neg p(x, z) \vee \neg p(z, y))$

$\forall x \forall y \forall z \forall t (p(x, y) \& p(y, z) \& p(z, t) \implies p(x, t))$

$\exists x \exists y \forall z (p(x, z) \vee p(y, z))$

Задача 2. Нека L е език без функционални символи и единствен предикатен символ p, който е двуместен. Да означим с A_n броя на структурите за езика L, чийто универсум е множеството $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, а с B_n броя на структурите със същия универсум, в които освен това е вярна формулата $\exists x p(x, x)$. Да се намери

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{A_n}$$

Задача 1. Да се докаже, че множеството, съдържащо само следните три формули, е изпълнимо:
$\forall x \forall y \forall z (p(x, y) \vee p(y, z) \vee p(x, z))$
$\forall x \forall y \forall z \forall t (p(x, y) \implies p(x, z) \vee p(z, t) \vee p(t, y))$
$\exists x \exists y \neg p(x, y)$

Задача 2. Нека L е език без функционални символи и единствен предикатен символ p, който е двуместен. Да означим с A_n броя на структурите за езика L, чийто универсум е множеството $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, а с B_n броя на структурите със същия универсум, в които освен това е вярна формулата $\forall x p(x, x)$. Да се намери

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$$

Задача 1. Да се докаже, че множествата $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ и $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ са изпълними, където $\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x p(x, x)$, $\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x \forall y p(x, y)$, $\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \exists y (\neg p(x, y) \,\&\, \neg p(y, x))$ и $\varphi_4 \leftrightharpoons \exists x \forall y p(y, x)$.

Задача 2. Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, D^{\mathcal{A}} \rangle$ е структура за езика без формално равенство, без функционални символи, без индивидни константи, имащ само двуместния предикатен символ D, където

$$\langle n, k \rangle \in D^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow \text{ има такова } s \in \mathbb{N}, \text{ че } 2k = ns.$$

Да се докаже, че:
а) $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ са определими;
б) $\{3\}$ не е определимо.

Задача 1. Да се докаже, че множествата $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ и $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ са изпълними, където $\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x p(x, x)$, $\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x \forall y p(y, x)$, $\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \forall y p(x, y)$ и $\varphi_4 \leftrightharpoons \exists x \exists y \exists z (\neg p(x, y) \,\&\, p(z, y) \,\&\, p(x, z) \,\&\, p(z, x))$.

Задача 2. Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, D^{\mathcal{A}} \rangle$ е структура за езика без формално равенство, без функционални символи, без индивидни константи, имащ само двуместния предикатен символ D, където

$$\langle n, k \rangle \in D^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow \text{ има такова } s \in \mathbb{N}, \text{ че } 3k = ns.$$

Да се докаже, че:
а) $\{0\}$, $\{1\}$, $\{3\}$ са определими;

б) $\{5\}$ не е определимо.

Задача 1. Да се дефинира на пролог предикат $p(L, M)$, който по даден списък от числа L при преудовлетворяване генерира в M всички списъци, такива че:

- множеството от елементите на M е подмножество на множеството от елементите на L;
- за всеки елемент X на M съществува такъв елемент Y на M, че множеството $\{\ X - Y, X * Y, X + Y\ \}$ е подмножество на множеството от елементите на L.

Задача 2. Да се дефинира на пролог предикат $t(M, T)$, който по дадена матрица M генерира в T транспонираната ѝ матрица. Матрица представяме като списък от редове, всеки от които е списък от елементите на този ред.

Задача 3. С метода на резолюцията да се докаже, че следната формула е предикатна тавтология:

$$\forall x \neg \forall y (p(x, y) \iff \neg \exists z (p(z, y) \mathbin{\&} p(y, z))).$$

Задача 4. Нека $\mathcal{A}$ е структурата $\langle \mathbb{N}, s^{\mathcal{A}} \rangle$ за предикатния език без формално равенство $\mathcal{L}$, имащ един триместен предикатен символ s, където

$$\langle n, k, \ell \rangle \in s^{\mathcal{A}} \qquad \text{точно тогава, когато} \qquad n + k = \ell.$$

Да се докаже, че:

а) всяко едно от множествата

$$\{0\},\ \{1\},\ \{3\},\ \{\langle n, k \rangle \mid 5 \text{ дели } n - k\}$$

е определимо в $\mathcal{A}$ с формула от $\mathcal{L}$;

б) идентитетът е единственият автоморфизъм в $\mathcal{A}$.

Задача 5. Да се докаже изпълнимостта на множеството от следните формули:

$\neg \exists x p(x, x)$

$\forall x \exists y (p(x, y) \mathbin{\&} \neg \exists z (p(x, z) \mathbin{\&} p(z, y)))$

$\exists x \neg \exists y p(y, x)$

$\exists x (\exists y p(y, x) \mathbin{\&} \neg \exists y (p(y, x) \mathbin{\&} \neg \exists z (p(x, z) \mathbin{\&} p(z, y))))$

Задача 1. Да се докаже, че множеството от следните четири формули е изпълнимо:

$\neg \exists x p(x, x)$, $\qquad \forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow \exists z (p(x, z) \mathbin{\&} p(z, y)))$,

$\forall x \exists y (p(x, y) \vee p(y, x))$, $\quad \exists x \forall y (\neg (x \doteq y) \Rightarrow p(x, y))$.

Задача 2. Нека $\mathcal{L}$ е езикът на предикатното смятане от първи ред без формално равенство, който има само един нелогически символ — двуместния предикатен символ p. Нека $\mathcal{A}$ е структурата за $\mathcal{L}$ с универсум множеството на естествените числа и

$$\langle n, k\rangle \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow \text{ броят на простите делители на } n \text{ е не по-голям от броя на простите делители на } k$$

Да се докаже, че: (а) множествата $\{0\}$ и $\{1\}$ са определими; (б) множеството $\{2012\}$ е неопределимо.

Задача 1. Да се докаже, че множеството от следните четири формули е изпълнимо:
$\forall x \neg p(x,x)$, $\quad \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \exists z (p(x,z) \,\&\, p(z,y)))$,
$\forall x \exists y (p(x,y) \vee p(y,x))$, $\quad \neg \forall x \exists y \neg(\neg(x \doteq y) \Rightarrow p(x,y))$.

Задача 2. Нека $\mathcal{L}$ е езикът на предикатното смятане от първи ред без формално равенство, който има само един нелогически символ — двуместния предикатен символ p. Нека $\mathcal{A}$ е структурата за $\mathcal{L}$ с универсум множеството на естествените числа и

$$\langle n, k\rangle \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow \text{ броят на простите делители на } n \text{ е по-голям или равен на броя на простите делители на } k$$

Да се докаже, че: (а) множествата $\{0\}$ и $\{1\}$ са определими; (б) множеството $\{2012\}$ е неопределимо.

Зад. 1. Да се дефинира на Пролог предикат p, който по даден списък от списъци L разпознава дали L може да се сортира по $\subset$. (Ако l_1 и l_2 са списъци, $l_1 \subset l_2$ означава, че елементите на l_1 са елементи на l_2, но не всички елементи на l_2 са елементи на l_1.)

Внимание: $[[0],[1]]$ не може да се сортира по $\subset$!

Зад. 2. Ако n е естествено число с десетичен запис $c_1c_2\dots c_k$, негатив на n наричаме числото с десетичен запис $d_1d_2\dots d_k$, където $d_i = 9 - c_i$ за $i = 1,2,\dots,k$. Да се напише предикат на Пролог, който генерира всички естествени числа, чийто негатив е просто число.

Пример: Негативът на числото 992 е 007, т.е. 7.

Зад. 1. Да се дефинира на Пролог предикат p, който по даден списък от списъци L разпознава дали L може да се сортира по $\subseteq$. (Ако l_1 и l_2 са списъци, $l_1 \subseteq l_2$ означава, че елементите на l_1 са елементи на l_2, но не всички елементи на l_2 са елементи на l_1.)

Внимание: $[[0],[1]]$ не може да се сортира по $\subseteq$!

Зад. 1. Да се докаже, че множеството от следните две формули е изпълнимо: $\quad \exists x(\exists y p(x,y) \,\&\, \exists y p(y,x))$,

$\neg \exists x \exists y (p(x, y) \,\&\, p(y, x))$.

Зад. 1. Нека L е списък от списъци, $L = [\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n]$. Казваме, че *двойката от списъци* F, G *е разбиване на* L, ако $F = [\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \ldots, \ell_{i_k}]$ и $G = [\ell_{j_1}, \ell_{j_2}, \ldots, \ell_{j_{n-k}}]$, където $\{i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Обединение на списък от списъци е множеството на всички обекти, които са елементи на някой елемент на списъка.

Да се дефинира на Пролог едноместен предикат p, който по даден списък от списъци L разпознава дали L може да се разбие на два списъка, които имат едно и също обединение.

Зад. 2. Нека $\mathcal{L}$ е езикът на предикатното смятане без равенство, който има предикатния символ p с арност 4 за единствен нелогически символ. Нека $\mathcal{A}$ е структурата за $\mathcal{L}$ с универсум множеството на целите числа и за произволни цели числа k, l, m, n:

$$\langle k, l, m, n \rangle \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow k + l + m = n.$$

Да се докаже, че: а) $\{0\}$ е определимо; б) $\{1\}$ е неопределимо; в) множеството на четните числа е определимо.

Зад. 1. Нека L е списък от списъци, $L = [\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n]$. Казваме, че *списъкът* M *е подредица на* L, ако $M = [\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \ldots, \ell_{i_k}]$, където $1 \leq i_j \leq n$ за $j = 1 \ldots k$ и $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

Да се дефинира на Пролог едноместен предикат p, който по даден списък от списъци L разпознава дали има такава подредица M на L, че конкатенацията на елементите на M да е елемент на L.

Зад. 2. Да се дефинира на Пролог едноместен предикат p, който при презадоволяне генерира всички прости числа с десетичен запис, който започва с десетичния запис на факултетния Ви номер.

Зад. 1. Да се дефинира на Пролог двуместен предикат p, който по даден списък от списъци L генерира в M най-дългата обща подредица на елементите на L.

Зад. 2. Нека L е списък, който има следния вид:

$$[[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x_n, y_n]].$$

Ще казваме, че L представя бинарната релация R, ако

$$R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}.$$

Да се дефинира на Пролог:

а) едноместен предикат s, който по даден списък L, представящ бинарната релация R, разпознава дали R е симетрична релация.

б) едноместен предикат t, който по даден списък L, представящ бинарната релация R, разпознава дали R е транзитивна релация.

в) триместен предикат c, който по дадени два списъка L_1 и L_2, представящи съответно бинарните релации R_1 и R_2, генерира в L_3 списък, представящ композицията R_3 на R_1 и R_2.

Напомняне: $(x, z) \in R_3$ тогава и само тогава, когато има двойки (x, y) и (y, z), такива че $(x, y) \in R_1$ и $(y, z) \in R_2$.

Задача 1. Да се дефинира на Пролог предикат $p(X, Y)$, който по даден списък от числа X при преудовлетворявания дава в Y всички разделяния на X. Разделяне на X е такъв списък $[X_1, X_2, \dots, X_n]$, че конкатенацията на списъците $X_1, X_2, \dots, X_n$ е X.

Задача 2. Да се докаже, че е изпълнимо множеството от следните формули:

$$\begin{array}{l}
\forall x \forall y \forall z ((p(x, y) \,\&\, p(y, z)) \Rightarrow p(x, z)) \\
\exists x (\neg p(x, x) \,\&\, \forall y \forall z (p(y, z) \Rightarrow p(x, z))) \\
\forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow p(y, y)) \\
\forall x \exists y (p(x, y) \,\&\, \forall z (p(x, z) \Rightarrow (p(z, x) \vee p(y, z))))
\end{array}$$

Задача 3. Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане без равенство, в който q и r са съответно триместен и двуместен предикатен символ. Нека $\mathcal{A}$ е структурата за $\mathcal{L}$ с универсум $\mathbb{R}$, в която q и r са интерпретирани по следния начин:

$$\langle a, b, c \rangle \in q^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow ab = c,$$

$$\langle a, b \rangle \in r^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow a + 2 = b.$$

Да се докаже, че са определими множествата $\{2\}$, $\{\frac{1}{2}\}$, $\{\sqrt{2}\}$, $\{\sqrt[3]{2}\}$ и $\{a \mid a > 1\}$.

Задача 1. Да се дефинира на Пролог предикат $p(X, Y)$, който по даден списък от числа X при преудовлетворявания дава в Y всички секции на X. Секция на списък $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ е списък $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}]$, където $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ и $a_{i_1} \le a_{i_2} \le \dots \le a_{i_k}$.

Задача 2. Да се докаже, че е изпълнимо множеството от следните формули:

$$\begin{array}{l}
\forall x \forall y \forall z ((p(x, y) \,\&\, p(y, z)) \Rightarrow p(x, z)) \\
\exists x \forall y \forall z ((p(y, z) \,\&\, p(z, y)) \Rightarrow (p(x, y) \,\&\, p(y, x))) \\
\forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow \exists z (p(x, z) \,\&\, p(z, y))) \\
\exists x \forall y \forall z (p(y, z) \Rightarrow p(x, z)) \\
\neg \exists x \forall y \forall z (p(y, z) \Rightarrow p(y, x))
\end{array}$$

Задача 3. Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане без равенство, в който p и r са съответно триместен и двуместен предикатен символ. Нека $\mathcal{A}$ е структурата за $\mathcal{L}$ с универсум $\mathbb{R}$, в която p и r са интерпретирани по следния начин:

$$\langle a, b, c\rangle \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow a + b = c,$$

$$\langle a, b\rangle \in r^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow a^2 = b.$$

Да се докаже, че са определими множествата $\{2\}$, $\{\frac{1}{2}\}$, $\{\sqrt{2}\,\}$, $\{a \mid a > 1\}$ и $\{\sqrt[3]{2}\,\}$.