За да определим множеството $\emptyset$, използваме, че за всяко множество A е изпълнено равенството:

$$A \cup \emptyset = A.$$

Твърдим, че и обратно ако $B \subseteq \mathbb{N}$ е такова, че за всяко $A \subseteq \mathbb{N}$ е в сила, че $A \cup B = A$, то $B = \emptyset$. Наистина, нека $A = \emptyset \subseteq \mathbb{N}$. Тогава $B = \emptyset \cup B = \emptyset$, откъдето $B = \emptyset$.

Следователно $\{\emptyset\}$ е определимо чрез формулата:

$$\phi_{\emptyset}(X) \rightleftharpoons \forall A(p(A, X, A)).$$

Определяме $\mathbb{N}$ дуално. За всяко $B \subseteq \mathbb{N}$ е вярно, че $\mathbb{N} \cup B = \mathbb{N}$. Обратно, ако за някое $A \subseteq \mathbb{N}$ за всяко множество B е изпълнено, че $A \cup B = A$, то в частност при $B = \mathbb{N}$ получаваме, че $\mathbb{N} = A \cup \mathbb{N} = A$, тоест $\mathbb{N} = A$. Така формула, определяща $\mathbb{N}$ е следната:

$$\phi_{\mathbb{N}}(X) \rightleftharpoons \forall B(p(X, B, X)).$$

Ясно е, че ако $A \subseteq B$, то $B = A \cup (B \setminus A)$, тоест има множество C, за което $B = A \cup C$. Обратно, ако $B = A \cup C$, то очевидно е, че $A \subseteq B$. Така получихме, че множеството $\{\langle A, B\rangle \mid A \subseteq B, B \subseteq \mathbb{N}\}$ се определя от формулата:

$$\phi_{\subseteq}(X, Y) \rightleftharpoons \exists C(p(X, C, Y)).$$

Накрая, $C = A \cap B$ тогава и само тогава, когато $C \subseteq A$, $C \subseteq B$ и C е най-голямото по включване множество, изпълняващо тези условия. Така може да определим множеството $\{\langle A, B, C\rangle \mid A, B \subseteq \mathbb{N}, C = A \cap B\}$ чрез формулата:

$$\phi_{\cap}(X, Y, Z) \rightleftharpoons \phi_1(X, Y, Z) \& \forall T(\phi_1(X, Y, T) \Rightarrow \phi_{\subseteq}(T, Z)),$$

където:

$$\phi_1(X, Y, Z) \rightleftharpoons \phi_{\subseteq}(Z, X) \& \phi_{\subseteq}(Z, Y).$$

Нека $A \neq \emptyset$ и $A \neq \mathbb{N}$. Ще докажем, че A не е определимо. Наистина, нека $a \in A$ и $b \in \mathbb{N} \setminus A$ са произволни. Такива има, защото A не е празно и A не съвпада с цялото множество $\mathbb{N}$. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е функцията, зададена чрез:

$$f(n) = \begin{cases} a \text{ ако } n = b \\ b \text{ ако } n = a \\ n \text{ ако } n \notin \{a, b\} \end{cases}$$

Дефинираме функцията $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ като:

$$F(X) = \{f(x) \,|\, x \in X\}.$$

Ясно е, че f е биекция. Наистина, нека $f(n) = f(m)$. От дефиницията на f следва, че $n \in \{a, b\} \iff f(n) \in \{a, b\}$. Следователно, ако $f(n) \notin \{a, b\}$, то $n \notin \{a, b\}$, откъдето $f(n) = n$. Аналогично $f(m) = m$ и следователно $n = m$. Нека $f(n) \in \{a, b\}$. Тогава $n \in \{a, b\}$ и $f(n) \neq n$. Очевидно, същото свойство има и m, тоест $f(m) \neq m$. Тъй като $m, n \in \{a, b\} \setminus \{f(n)\}$. то $n = m$. С това показахме, че f е инекция. От дефиницията се вижда, че f примеа стойностите a и b, а ако $n \notin \{a, b\}$, то $f(n) = n$, следователно f е сюрекция върху $\mathbb{N}$.

Сега е ясно, че F е биекция. Наистина $F(X) = F(Y)$ е изпълнено тогава и само тогава, когато за всяко $x \in X(f(x) \in F(Y))$ и $y \in Y(f(y) \in F(X))$. Но тъй като f е инекция $f(x) \in F(Y)$ точно когато $x \in Y$, така че $X \subseteq Y$. Аналогично се съобразява, че и $Y \subseteq X$. Накрая F и сюрекция, защото за всяко множество X е изпълнено:

$$X = \{f(f^{-1}(x)) \,|\, x \in X\} = F(\{f^{-1}(x) \,|\, x \in X\}).$$

Нещо повече имаме, че:

$$F(X \cup Y) = \{f(x) \,|\, x \in X \cup Y\} = \{f(x) \,|\, x \in X\} \cup \{f(x) \,|\, x \in Y\} = F(X) \cup F(Y).$$

Следователно $p(X, Y, Z) \to p(F(X), F(Y), F(Z))$. И обратно, ако $F(X) \cup F(Y) = F(Z)$, то:

$$F(Z) = \{f(x) \,|\, x \in X\} \cup \{f(y) \,|\, y \in Y\} = \{f(x) \,|\, x \in X \cup Y\} = F(X \cup Y)$$

и тъй като F е биекция, то $X \cup Y = Z$. Следователно, получихме, че и $p(F(X), F(Y), F(Z)) \to p(X, Y, Z)$.

С това проверихме, че F е автоморфизъм в структурата $\mathcal{A}$.

От друга страна $F(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$ и тъй като $a \in A$, то $f(a) \in F(A)$. Така получихме, че $b \in F(A)$, което показва, че $F(A) \neq A$. Следователно A не е определимо.

За да определим множеството $\emptyset$, използваме, че за всяко множество A е изпълнено равенството:

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Твърдим, че и обратно ако $B \subseteq \mathbb{N}$ е такова, че за всяко $A \subseteq \mathbb{N}$ е в сила, че $A \cap B = B$, то $B = \emptyset$. Наистина, нека $A = \emptyset \subseteq \mathbb{N}$. Тогава $\emptyset = \emptyset \cap B = B$, откъдето $B = \emptyset$.

Следователно $\{\emptyset\}$ е определимо чрез формулата:

$$\phi_\emptyset(X) \rightleftharpoons \forall A(p(A, X, X)).$$

Определяме $\mathbb{N}$ дуално. За всяко $B \subseteq \mathbb{N}$ е вярно, че $\mathbb{N} \cap B = B$. Обратно, ако за някое $A \subseteq \mathbb{N}$ за всяко множество B е изпълнено, че $A \cap B = B$, то в частност при $B = \mathbb{N}$ получаваме, че $A = A \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, тоест $\mathbb{N} = A$. Така формула, определяща $\mathbb{N}$ е следната:

$$\phi_{\mathbb{N}}(X) \rightleftharpoons \forall B(p(X, B, B)).$$

Ясно е, че ако $A \subseteq B$, то $A = A \cap B$, тоест има множество C, за което $A = C \cap B$. Обратно, ако $A = C \cap B$, то очевидно е, че $A \subseteq B$. Така получихме, че множеството $\{\langle A, B\rangle \mid A \subseteq B, B \subseteq \mathbb{N}\}$ се определя от формулата:

$$\phi_\subseteq(X, Y) \rightleftharpoons \exists C(p(C, Y, X)).$$

Накрая, $C = A \cup B$ тогава и само тогава, когато $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ и C е най-малкото по включване множество, изпълняващо тези условия. Така може да определим множеството $\{\langle A, B, C\rangle \mid A, B \subseteq \mathbb{N}, C = A \cup B\}$ чрез формулата:

$$\phi_\cap(X, Y, Z) \rightleftharpoons \phi_1(X, Y, Z) \& \forall T(\phi_1(X, Y, T) \Rightarrow \phi_\subseteq(Z, T)),$$

където:

$$\phi_1(X, Y, Z) \rightleftharpoons \phi_\subseteq(X, Z) \& \phi_\subseteq(Y, Z).$$

Нека $A \neq \emptyset$ и $A \neq \mathbb{N}$. Ще докажем, че A не е определимо. Наистина, нека $a \in A$ и $b \in \mathbb{N} \setminus A$ са произволни. Такива има, защото A не е празно и A не съвпада с цялото множество $\mathbb{N}$. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е функцията, зададена чрез:

$$f(n) = \begin{cases} a \text{ ако } n = b \\ b \text{ ако } n = a \\ n \text{ ако } n \notin \{a, b\} \end{cases}$$

Дефинираме функцията $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ като:

$$F(X) = \{f(x) \,|\, x \in X\}.$$

Ясно е, че f е биекция. Наистина, нека $f(n) = f(m)$. От дефиницията на f следва, че $n \in \{a, b\} \iff f(n) \in \{a, b\}$. Следователно, ако $f(n) \notin \{a, b\}$, то $n \notin \{a, b\}$, откъдето $f(n) = n$. Аналогично $f(m) = m$ и следователно $n = m$. Нека $f(n) \in \{a, b\}$. Тогава $n \in \{a, b\}$ и $f(n) \neq n$. Очевидно, същото свойство има и m, тоест $f(m) \neq m$. Тъй като $m, n \in \{a, b\} \setminus \{f(n)\}$. то $n = m$. С това показахме, че f е инекция. От дефиницията се вижда, че f примеа стойностите a и b, а ако $n \notin \{a, b\}$, то $f(n) = n$, следователно f е сюрекция върху $\mathbb{N}$.

Сега е ясно, че F е биекция. Наистина $F(X) = F(Y)$ е изпълнено тогава и само тогава, когато за всяко $x \in X(f(x) \in F(Y))$ и $y \in Y(f(y) \in F(X))$. Но тъй като f е инекция $f(x) \in F(Y)$ точно когато $x \in Y$, така че $X \subseteq Y$. Аналогично се съобразява, че и $Y \subseteq X$. Накрая F и сюрекция, защото за всяко множество X е изпълнено:

$$X = \{f(f^{-1}(x)) \,|\, x \in X\} = F(\{f^{-1}(x) \,|\, x \in X\}).$$

Нещо повече имаме, че:

$$F(X \cap Y) = \{f(x) \,|\, x \in X \cap Y\} = \{f(x) \,|\, x \in X\} \cap \{f(x) \,|\, x \in Y\} = F(X) \cap F(Y),$$

защото f е биекция. Следователно $p(X, Y, Z) \to p(F(X), F(Y), F(Z))$. И обратно, ако $F(X) \cup F(Y) = F(Z)$, то:

$$F(Z) = \{f(x) \,|\, x \in X\} \cap \{f(y) \,|\, y \in Y\} = \{f(x) \,|\, x \in X \cap Y\} = F(X \cup Y),$$

защото f е биекция и тъй като F е биекция, то $X \cap Y = Z$. Следователно, получихме, че и $p(F(X), F(Y), F(Z)) \to p(X, Y, Z)$.

С това проверихме, че F е автоморфизъм в структурата $\mathcal{A}$.

От друга страна $F(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$ и тъй като $a \in A$, то $f(a) \in F(A)$. Така получихме, че $b \in F(A)$, което показва, че $F(A) \neq A$. Следователно A не е определимо.