

Упражнение 08.05.2002

Дефиниции:

Променливата x е свободна във формулата ϕ , ако има поне едно свободно срещане във ϕ (индуктивна дефиниция от лекциите).

Означение $\tau[x/\sigma]$, където τ и σ са термове, а x е променлива, е терм, който се получава от τ като заменим едновременно всички срещания на x със σ . Индуктивно се дефинира $\phi[x/\sigma]$ и означава формулата, получена от ϕ , в която са заменени едновременно всички свободни срещания на x с терма σ , който е допустим за заместване на x във ϕ . Казваме, че σ е допустим за заместване на x във ϕ , ако след заместването на всички свободни x с σ никоя от променливите на σ не става свързана във ϕ (т.е. свободните срещания на x не се намират в област на действие на квантори по променливи от σ). Пример: термът $\tau = 2 \cdot y + 1$ не е допустим за заместване на x във формулата $\phi(x) = \exists y(x = 2 \cdot y)$, след замената получаваме формула $\psi = \exists y(2 \cdot y + 1 = 2 \cdot y)$. Означение: $\phi[x/\tau]$ ще означава и че τ е допустимо за заместване на x във ϕ .

Твърдения от лекциите:

Дадени са формула ϕ , оценки v_1 и v_2 , структура A :

- 1) Ако за всяка $y \in \text{Free}(\psi)$, $v_1(y) = v_2(y)$, тогава $\|\phi\|_{v_1}^A = \|\phi\|_{v_2}^A$.
- 2) Ако за термовете $\tau_1, \dots, \tau_n$ и различни променливи $x_1, \dots, x_n$ и всяка $y \in \text{Free}(\phi) \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ имаме $v_1(y) = v_2(y)$ и $\|\tau_i\|_{v_2}^A = v_1(x_i)$ за $i=1, \dots, n$, тогава $\|\phi\|_{v_1}^A = \|\phi[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]\|_{v_2}^A$.

Задача 1

Ако $A \models \phi \rightarrow \psi$ и $x \notin \text{Free}(\phi)$, то $A \models (\exists x) \phi \rightarrow \psi$.

Доказателство:

Допускаме, че в A не е вярна $(\exists x) \phi \rightarrow \psi$. Тогава съществува оценка v , такава че $\|(\exists x) \phi \rightarrow \psi\|_v^A = \perp$, следователно (а) $\|\exists x \phi\|_v^A = I$ и (б) $\|\psi\|_v^A = \perp$.

От (а) следва, че съществува елемент от носителя $a \in |A|$, такъв че $\|\phi\|_{v_a^x}^A = I$. Понеже $x \notin \text{Free}(\phi)$, то за всяка $y \in \text{Free}(\phi)$, $v_a^x(y) = v(y)$ и по Твърдение-(1) и (б) следва, че $\|\psi\|_{v_a^x}^A = \|\psi\|_v^A = \perp$. Тогава по дефиниция $\|\phi \rightarrow \psi\|_{v_a^x}^A = \perp$, което е противоречие с условието че $A \models \phi \rightarrow \psi$, което значи и че $\phi \rightarrow \psi$ е вярна във структурата при произволна оценка.

□

Задача 2

Пренексни операции

(1) За формула ϕ , ако променлива $y \notin \text{Free}(\phi)$, то $\forall x \phi \leftrightarrow \forall y \phi[x/y]$ е предикатна тавтология.

Доказателство:

Да вземем произволни структура A , оценка v в нея. За всеки елемент a от носителя на структурата, тъй като $y \notin \text{Free}(\varphi)$, то за всяка $z \in \text{Free}(\varphi) \setminus \{x\}$ е изпълнено $v_a^x(z) = v_a^y(z)$ и $\|y\|_{v_a^y}^A = a = v_a^x(x)$. Тогава по Твърдение-(1) следва, че $\|\varphi\|_{v_a^x}^A = \|\varphi[x/y]\|_{v_a^y}^A$.

Трябва да докажем, че $\|\forall x \varphi \leftrightarrow \forall y \varphi[x/y]\|_v^A = I$.

Нека $\|\forall x \varphi\|_v^A = I$. Тогава за всеки елемент a от носителя на структурата $\|\varphi\|_{v_a^x}^A = I$ и следователно за всяко a , $\|\varphi[x/y]\|_{v_a^y}^A = I$, от където по дефиницията следва, че $\|\forall y \varphi[x/y]\|_v^A = I$.

Аналогично се доказва обратната посока: ако $\|\forall y \varphi[x/y]\|_v^A = I$. То и $\|\forall x \varphi\|_v^A = I$.

□

- (2) (a) $\models \neg(\exists x \varphi) \leftrightarrow \forall x (\neg\varphi)$
 (б) $\models \neg(\forall x \varphi) \leftrightarrow \exists x (\neg\varphi)$

- (3) Ако φ и ψ са формули, такива че $x \notin \text{Free}(\psi)$, то
 (a) $\models (\exists x \varphi) \vee \psi \leftrightarrow \exists x (\varphi \vee \psi)$
 (б) $\models (\psi \vee (\exists x \varphi)) \leftrightarrow \exists x (\psi \vee \varphi)$

Контрпример за $x \in \text{Free}(\varphi)$: формулата $(\exists x \varphi) \vee \psi \leftrightarrow \exists x (\varphi \vee \psi)$ не е предикатна тавтология за $\varphi \equiv x = x + 1$ и $\psi \equiv x = 1$ в език L от първи ред с равенство, двуместен функционален символ $+$, и константа 1. Тогава $(\exists x \varphi) \vee \psi \equiv \exists x (x = x + 1) \vee (x = 1)$, а $\exists x (\varphi \vee \psi) \equiv \exists x (x = x + 1 \vee x = 1)$. В структура $A = (\mathbb{N}, =, +, 1)$, където $+$ операцията събиране на естествени числа, за фиксирана оценка v , такава че $v(x) = 0$ имаме, че $\|(\exists x \varphi) \vee \psi\|_v^A = I$ и $\|\exists x (\varphi \vee \psi)\|_v^A = I$.

Задача 3

Допълнителни пренексни операции (следствие от горните):

- (4) Ако $x \notin \text{Free}(\psi)$, то:
 (a) $\models ((\exists x \varphi) \rightarrow \psi) \leftrightarrow \forall x (\varphi \rightarrow \psi)$
 (б) $\models ((\forall x \varphi) \rightarrow \psi) \leftrightarrow \exists x (\varphi \rightarrow \psi)$
- (5) Ако $x \notin \text{Free}(\varphi)$, то:
 (a) $\models (\varphi \rightarrow (\exists x \psi)) \leftrightarrow \exists x (\varphi \rightarrow \psi)$
 (б) $\models (\varphi \rightarrow (\forall x \psi)) \leftrightarrow \forall x (\varphi \rightarrow \psi)$
- (6) Ако $x \notin \text{Free}(\psi)$, то:
 (a) $\models ((\exists x \varphi) \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x (\varphi \wedge \psi)$
 (б) $\models ((\forall x \varphi) \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x (\varphi \wedge \psi)$

Задача 4

Докажете, че следните формули са предикатни тавтологии:

- (1) $\exists x \exists y \phi \leftrightarrow \exists y \exists x \phi$
 (2) $\forall x \forall y \phi \leftrightarrow \forall y \forall x \phi$
 (3) $\exists x \forall y \phi \rightarrow \forall y \exists x \phi$

Доказателство:

Да вземем произволни структура A , оценка v в нея, и нека $\|\exists x \forall y \phi\|_v^A = I$. Тогава съществува елемент a от носителя на структурата, такъв че $\|\forall y \phi\|_{v_a^x}^A = I$.

Ако допуснем, че $\|\forall y \exists x \phi\|_v^A = L$, то съществува елемент c от носителя, такъв че $\|\exists x \phi\|_{v_c^y}^A = L$.

Тогава за всеки елемент a от структурата имаме, че $\|\phi\|_{v_c^y x}^A = L$. Тъй като x и y са различни

променливи, то $v_c^y x = v_a^x y$ и следователно $\|\phi\|_{v_a^x y}^A = \|\phi\|_{v_c^y x}^A = L$. Но тъй като $\|\forall y \phi\|_{v_a^x}^A = I$, то за

всеки елемент b от носителя на структурата $\|\phi\|_{v_a^x y}^A = I$, в частност това е вярно и за c , т.е.

$\|\phi\|_{v_a^x c}^A = I$, което е противоречие. Следователно допускането е невярно и $\|\forall y \exists x \phi\|_v^A = I$.

Следователно $\|\exists x \forall y \phi \rightarrow \forall y \exists x \phi\|_v^A = I$.

□

- (4) Ако $x \notin \text{Free}(\phi)$, то $(\exists x \phi) \leftrightarrow \phi$ и $(\forall x \phi) \leftrightarrow \phi$ са предикатни тавтологии.