

Упражнение по Логическо програмиране (05.04.2002)

Субституции. Композиция на субституции.

Дефиниции:

1. Субституция ξ е крайно множество от вида $\{x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n\}$, където $x_1, \dots, x_n$ са различни променливи, а $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове, такива че $\tau_1 \neq x_1, \dots, \tau_n \neq x_n$.
2. Празната субституция означаваме с ϵ .
3. $\text{Dom}(\xi) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\text{Range}(\xi) = \text{Var}(\tau_1) \cup \dots \cup \text{Var}(\tau_n)$.
4. За терм $\tau \in \text{Term}$ и субституция $\theta = \{x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n\}$, с $\tau\theta$ означаваме терма, който се получава от τ , след като заменим едновременно всички срещания на $x_1, \dots, x_n$ в τ съответно с $\tau_1, \dots, \tau_n$.
5. Ако θ е субституция, дефинираме функцията $\hat{\theta} : \text{Term} \rightarrow \text{Term}$, като $\hat{\theta}(\tau) = \tau\theta$.
6. Субституцията $\xi = \{x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n\}$ е преименуваща, ако $\tau_1, \dots, \tau_n$ са различни променливи.
7. Нека $\xi = \{x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n\}$ и $\eta = \{y_1/\sigma_1, \dots, y_m/\sigma_m\}$. Композицията на ξ и η означаваме с $\xi \circ \eta$ и дефинираме така: $\xi \circ \eta = \{x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n\} \circ \{y_1/\sigma_1, \dots, y_m/\sigma_m\} = \{x_{i_1}/(\tau_{i_1}\eta), \dots, x_{i_n}/(\tau_{i_n}\eta), y_{j_1}/\sigma_{j_1}, \dots, y_{j_k}/\sigma_{j_k}\}$, където $i_1 < \dots < i_n$ са измежду числата $\{1, \dots, n\}$, такива че $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\}$ точно когато $x_i = \tau_i\eta$; а $j_1, \dots, j_k$ са онези индекси, за които $y_{j_1}, \dots, y_{j_k} \in \{y_1, \dots, y_m\} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. С други думи $\xi \circ \eta$ е субституцията, която се получава от $\{x_1/(\tau_1\eta), \dots, x_n/(\tau_n\eta), y_1/\sigma_1, \dots, y_m/\sigma_m\}$ като задраскаме всички елементи от вида $x_i/(\tau_i\eta)$ за които $\tau_i\eta = x_i$ и всички елементи y_j/σ_j за които $y_j \in \{x_1, \dots, x_n\}$.
8. Казваме, че ξ е унификатор за термовете $\tau_1, \dots, \tau_n$ ако $\tau_1\xi = \tau_2\xi = \dots = \tau_n\xi$.
9. θ е *най-общ унификатор* (НОУ) за термовете $\tau_1, \dots, \tau_n$, ако е унификатор за тях и за всеки друг унификатор ξ на термовете $\tau_1, \dots, \tau_n$, съществува субституция η , такава че $\xi = \theta \circ \eta$.

Примери:

1. Ако $\theta = \{x/a, y/f(b), z/c\}$ и $\tau = g(x, y, z)$, то $\tau\theta = g(a, f(b), c)$.
2. Нека $\xi = \{x/f(y), y/z\}$ и $\eta = \{x/a, y/b, z/y\}$. Тогава $\xi \circ \eta = \{x/f(b), z/y\}$.

Свойство: Нека $x \neq \tau$ и ξ е субституция, тогава ако $x\xi = \tau\xi$, то $\{x/\tau\} \circ \xi = \xi$.

Задача 1

Кои са всички субституции ξ за които съществува субституция η , такава че $\xi \circ \eta = \epsilon$?

Отговор:

Това са всички субституции от вида $\theta = \{x_1/x_{i_1}, \dots, x_n/x_{i_n}\}$, където $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Задача 2

Кои са тези изображения $f : \text{Term} \rightarrow \text{Term}$, за които $\exists$ субституция θ , такава че $f = \hat{\theta}$.

Отговор: Това са всички крайно породени хомоморфизми в свободната Ербранова алгебра на термовете.

Задача 3

- Дадени са терм τ и субституции ξ и η , такива че $\tau\xi = \tau$. Докажете че субституцията $\xi \upharpoonright_{\text{Var}(\tau)}$ е преименуваща.
- Дадени са два терма τ и τ' и субституции ξ и η , такива че $\tau\xi = \tau'$ и $\tau'\eta = \tau$. Докажете че субституциите $\xi \upharpoonright_{\text{Var}(\tau)}$ и $\eta \upharpoonright_{\text{Var}(\tau')}$ са преименуващи.

Дефиниция

В множеството от субституциите въвеждаме (пред)наредба¹ по следния начин: $\xi \leq \eta$ точно когато $\exists \zeta$ такава че $\xi \circ \zeta = \eta$.

Задача 4

- Проверете рефлексивност и транзитивност на горната релация.
- Антисиметрична ли е? Не. *Контрапример*: $\xi = \{x/f(x), y/f(y)\}$ и $\eta = \{x/f(y), y/f(x)\}$. Тогава $\xi \leq \eta$, защото съществува субституция $\zeta = \{x/y, y/x\}$, за която $\xi \circ \zeta = \eta$ и $\eta \circ \zeta = \xi$.
- Докажете, че ако $\xi \leq \eta$ и $\eta \leq \xi$, то съществува ζ , такава че $\xi \circ \zeta = \eta$ и ζ е преименуваща.

Задача 5

Горната релация съгласувана ли е с композицията? *Отг.*: в ляво - да, в дясно - не:

- $\xi \leq \eta \Rightarrow \forall \zeta (\xi \circ \zeta \leq \zeta \circ \eta)$
- $\xi \leq \eta \not\Rightarrow \forall \zeta (\xi \circ \zeta \leq \eta \circ \zeta)$. *Контрапример*: $\xi = \varepsilon$, $\eta = \{x/y\}$. Тогава $\xi = \varepsilon \leq \eta$, защото $\varepsilon \circ \eta = \eta$. Освен това съществува $\zeta = \{x/f(x)\}$, такава че $\xi \circ \zeta = \zeta = \{x/f(x)\}$, а $\eta \circ \zeta = \{x/y\}$ и $\xi \circ \zeta \not\leq \eta \circ \zeta$, защото не съществува субституция β , такава че $\xi \circ \zeta \circ \beta = \eta \circ \zeta$, т.е. такава че $\zeta \circ \beta = \eta \circ \zeta$, т.е. $\{x/f(x)\beta\} = \{x/y\}$, т.е. такава че $\{x/f(\beta(x))\} = \{x/y\}$.

Задача 6 (ЕК)

Ако $\xi \leq \xi_1$ и $\xi \leq \xi_2$, то съществува ξ_0 , такава че $\xi_0 = \inf(\xi_1, \xi_2)$.

Задача 7

Нека съществуват ξ_1 и ξ_2 , такива че $\tau_1 \xi_1 = \tau_2 \xi_2$ и нека η е преименуваща, такава че $\text{Var}(\tau_1) \cap \text{Var}(\tau_2 \eta) = \emptyset$ и $\text{Range}(\eta) \cap \text{Var}(\tau_2) = \emptyset$. Докажете че τ_1 и $\tau_2 \eta$ са унифицируеми.

Решение:

Унификаторът за τ_1 и $\tau_2 \eta$ е субституцията $\sigma = \xi_1 \upharpoonright_{\text{Var}(\tau_1)} \cup (\eta^{-1} \xi_2) \upharpoonright_{\text{Var}(\tau_2 \eta)}$.

Унификация Алгоритъм на най-левите различия.

Дадено е множество от термове $E = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$.

Стъпка 1. Полагаме $k=0$, $E_0=E$, $\xi_0=\varepsilon$.

Стъпка 2. Ако $E_k \xi_k$ се състои от един елемент, то $\xi = \xi_0 \circ \xi_1 \circ \dots \circ \xi_k$ е НОУ за E .

В противен случай $E_k \xi_k = \{\tau_1, \dots, \tau_k\}$ и намираме множеството на различията $DS(E_k \xi_k)$.

Стъпка 3. Ако съществуват термове x_i и τ'' в $DS(E_k \xi_k)$, такива че x_i е променлива, която не се среща в τ'' , премини на стъпка 4. В противен случай E не е унифицируемо. Край.

Стъпка 4. Нека $\xi_{k+1} = \{x_i/\tau''\}$ и $E_{k+1} = E_k \xi_k$.

Стъпка 5. $k = k+1$.

Забележка: Ако η е унификатор за E , то за всяко k , $\eta = \xi_0 \circ \dots \circ \xi_k \circ \eta$.

Задачи: Намерете НОУ (или докажете, че няма такъв) за следните множества от термове:

- $\{p(a, x, f(g(y))), p(z, f(z), f(u))\}$
- $\{f(a, x, g(x)), f(a, y, y)\}$
- $\{h(g(f(x, y), g(y, a)), f(z, z)), h(g(v, g(h(x), x)), f(f(y, a), v))\}$

¹ Преднаредба - релация, която е рефлексивна ($\forall x: xRx$) и транзитивна ($\forall x \forall y \forall z: xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz$).

(Частична) Наредба - релация, която е рефлексивна, транзитивна и антисиметрична ($\forall x \forall y: xRy \ \& \ yRx \Rightarrow x=y$)