# Теория

Език на предикатното смятане от първи ред (*сигнатура*) наричаме [\Sigma](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5CSigma)=(Func;Pred;[\rho](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5Crho)) - множества от функционални и предикатни символи и тяхната местност (броя на аргументите им). Нека са дадени и други специални символи x1,x2,... които са изброимо безкрайно много и ще наричаме *индивидни променливи*.

*Терм* наричаме:

1. Всеки константен символ (0-местен функционален символ);
2. Всяка индивидна променлива
3. f(T1,...,Tn), където f е n-местен функ. символ, а T1,...,Tn са термове.

*Атомарна формула (атом)* наричаме:

1. Всеки 0-местен предикатен символ
2. p(T1,...,Tn), където p е n-местен функ. символ, а T1,...,Tn са термове.

Формула наричаме:

1. Всеки атом
2. F1 & F2, F1 v F2, not(F1), F1 -> F2, F1 <-> F2, където F1 и F2 са формули
3. [\exists x F_1](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5Cexists+x+F_1), [\forall x F_1](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5Cforall+x+F_1), където F1 е формула.

Структура наричаме S = ([\Sigma](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5CSigma), D, I), където [\Sigma](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5CSigma) е сигнатура, D е множество, което наричаме *носител*, а I - *интерпретация* на функционалните и предикатните символи до конкретни функции и предикати в D. Така структурата дава семантика на езика (сигнатурата). *Оценка* в S наричаме изображение v:VAR -> D, което дава стойност на индивидните променливи.

Стойност на терм в структура S при оценка v:

1. cS,v = I(c) [\in](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5Cin)D.
2. xS,v = v(x).
3. f(T1,...,Tn)S,v = I(f)(T1S,v,...,TnS,v).

Стойност на формула в структура S при оценка v:

1. p(T1,...,Tn)S,v = I(p)(T1S,v,...,TnS,v).
2. (F1 & F2)S,v = min(F1S,v,F2S,v).  
   (F1 v F2)S,v = max(F1S,v,F2S,v).  
   (not(F1))S,v = 1-F1S,v.  
   (F1 -> F2)S,v = max(F1S,v,1-F2S,v).  
   (F1 <-> F2)S,v = 1 <=> F1S,v = F2S,v.
3. [(\exists x F1)^{S,v} = max_{d\in D}(F_1^{S,v[x\rightarrow d]})](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%28%5Cexists+x+F1%29%5E%7BS%2Cv%7D+%3D+max_%7Bd%5Cin+D%7D%28F_1%5E%7BS%2Cv%5Bx%5Crightarrow+d%5D%7D%29).  
   [(\forall x F1)^{S,v} = min_{d\in D}(F_1^{S,v[x\rightarrow d]})](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%28%5Cforall+x+F1%29%5E%7BS%2Cv%7D+%3D+min_%7Bd%5Cin+D%7D%28F_1%5E%7BS%2Cv%5Bx%5Crightarrow+d%5D%7D%29).

Казваме, че F е *тъждествено вярна* в S (FS = 1), ако за всяка оценка v в S, FS,v = 1. Казваме, че F е *предикатна тавтология*, ако FS = 1 за всяка структура S, т.е. формулата F е логически вярна независимо то обектите, за които се отнася.

# Задачи

Работим в сигнатурата [\Sigma = (\{c,f\},\{p,q\},\rho)](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5CSigma+%3D+%28%5C%7Bc%2Cf%5C%7D%2C%5C%7Bp%2Cq%5C%7D%2C%5Crho%29), като [\rho(c) = 0, \rho(f) = \rho(q) = 1, \rho(p) = 2](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5Crho%28c%29+%3D+0%2C+%5Crho%28f%29+%3D+%5Crho%28q%29+%3D+1%2C+%5Crho%28p%29+%3D+2).

1. Кои от следните формули са предикатни тавтологии? Докажете или дайте контрапример:
   * q(x) v not(q(x)).
   * not(q(x) & not(q(x))).
   * (p(x,y) -> q(x)) <-> (not(q(x)) -> not(p(x,y))).
   * [\forall](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5Cforall)x not(q(x)) <-> not([\exists](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5Cexists)x q(x)).
   * [\exists](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5Cexists)x not(q(x)) <-> not([\forall](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5Cforall)x q(x)).
   * [\forall x\exists y](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5Cforall+x%5Cexists+y)p(x,y) <-> [\exists y\forall x](http://moodle.openfmi.net/filter/tex/displaytex.php?%5Cexists+y%5Cforall+x)p(x,y).
2. Изберете подходяща сигнатура и изкажете следните изречения с формула от първи ред. Кои от тях са предикатни тавтологии?
   * Всички плодове в кошницата са лоши
   * Ако всеки предшествени на предшественика на даден човек е също предшесвеник на този човек и никой не е предшественик сам на себе си, то съществува човек, който няма предшественици
   * Всеки бръснар в Джонсвил бръсне тези и само тези хора, които не бръснат сами себе си. Следователно в Джонсвил няма нито един бръснар
   * Ако двама души са родственици на трети, то първият е родственик на втория. Всеки е родственик на някого. Следователно ако Джон е родственик на Уилям, а Уилям - на Едит, тогава Джон е родственик на Едит
   * Ако всеки обича себе си, то поне някой някого обича
   * Щом всички обичат Джейн, то всички са обичани