# Теория

Език на предикатното смятане от първи ред (*сигнатура*) наричаме =(Func;Pred;) - множества от функционални и предикатни символи и тяхната местност (броя на аргументите им). Нека са дадени и други специални символи x1,x2,... които са изброимо безкрайно много и ще наричаме *индивидни променливи*.

*Терм* наричаме:

1. Всеки константен символ (0-местен функционален символ);
2. Всяка индивидна променлива
3. f(T1,...,Tn), където f е n-местен функ. символ, а T1,...,Tn са термове.

*Атомарна формула (атом)* наричаме:

1. Всеки 0-местен предикатен символ
2. p(T1,...,Tn), където p е n-местен функ. символ, а T1,...,Tn са термове.

Формула наричаме:

1. Всеки атом
2. F1 & F2, F1 v F2, not(F1), F1 -> F2, F1 <-> F2, където F1 и F2 са формули
3. , , където F1 е формула.

Структура наричаме S = (, D, I), където  е сигнатура, D е множество, което наричаме *носител*, а I - *интерпретация* на функционалните и предикатните символи до конкретни функции и предикати в D. Така структурата дава семантика на езика (сигнатурата). *Оценка* в S наричаме изображение v:VAR -> D, което дава стойност на индивидните променливи.

Стойност на терм в структура S при оценка v:

1. cS,v = I(c) D.
2. xS,v = v(x).
3. f(T1,...,Tn)S,v = I(f)(T1S,v,...,TnS,v).

Стойност на формула в структура S при оценка v:

1. p(T1,...,Tn)S,v = I(p)(T1S,v,...,TnS,v).
2. (F1 & F2)S,v = min(F1S,v,F2S,v).
(F1 v F2)S,v = max(F1S,v,F2S,v).
(not(F1))S,v = 1-F1S,v.
(F1 -> F2)S,v = max(F1S,v,1-F2S,v).
(F1 <-> F2)S,v = 1 <=> F1S,v = F2S,v.
3. ![(\exists x F1)^{S,v} = max_{d\in D}(F_1^{S,v[x\rightarrow d]})]().
![(\forall x F1)^{S,v} = min_{d\in D}(F_1^{S,v[x\rightarrow d]})]().

Казваме, че F е *тъждествено вярна* в S (FS = 1), ако за всяка оценка v в S, FS,v = 1. Казваме, че F е *предикатна тавтология*, ако FS = 1 за всяка структура S, т.е. формулата F е логически вярна независимо то обектите, за които се отнася.

# Задачи

Работим в сигнатурата , като .

1. Кои от следните формули са предикатни тавтологии? Докажете или дайте контрапример:
	* q(x) v not(q(x)).
	* not(q(x) & not(q(x))).
	* (p(x,y) -> q(x)) <-> (not(q(x)) -> not(p(x,y))).
	* x not(q(x)) <-> not(x q(x)).
	* x not(q(x)) <-> not(x q(x)).
	* p(x,y) <-> p(x,y).
2. Изберете подходяща сигнатура и изкажете следните изречения с формула от първи ред. Кои от тях са предикатни тавтологии?
	* Всички плодове в кошницата са лоши
	* Ако всеки предшествени на предшественика на даден човек е също предшесвеник на този човек и никой не е предшественик сам на себе си, то съществува човек, който няма предшественици
	* Всеки бръснар в Джонсвил бръсне тези и само тези хора, които не бръснат сами себе си. Следователно в Джонсвил няма нито един бръснар
	* Ако двама души са родственици на трети, то първият е родственик на втория. Всеки е родственик на някого. Следователно ако Джон е родственик на Уилям, а Уилям - на Едит, тогава Джон е родственик на Едит
	* Ако всеки обича себе си, то поне някой някого обича
	* Щом всички обичат Джейн, то всички са обичани