12.Езици с формално равенство

Нека \mathfrak{L}е предикатен език без формално равенство, да означим с \mathfrak{L}^=, езикът който се получава от \mathfrak{L}при добавянето на формално равенство.  
Тогава произволна структора \mathcal{A}за езика \mathfrak{L}е структура и за езика \mathfrak{L}^=

**Свойства на формалното равенство**

\mathcal{A} \models \forall x \ (x \doteq x)  
\mathcal{A} \models \forall x \forall y \ (x \doteq y \Rightarrow x \doteq x)  
\mathcal{A} \models \forall x \forall y \forall z \ (x \doteq y & y \doteq z \Rightarrow x \doteq z)  
\mathcal{A} \models \forall x_1... \forall x_n \forall y_1... \forall y_n \ (x_1 \doteq y_1& ... & x_n \doteq y_n) \ \Rightarrow (p(x_1,..,x_n)=p(y_1,..,y_n))  
p \in \underset{\#(p)=n}{Pred } \mathfrak{L}

\mathcal{A} \models \forall x_1... \forall x_n \forall y_1... \forall y_n \ (x_1 \doteq y_1& ... & x_n \doteq y_n) \ \Rightarrow (f(x_1,..,x_n)=f(y_1,..,y_n))  
p \in \underset{\#(p)=n}{Func} \mathfrak{L}

**Проверка на две от равенствата**:

Имаме \mathcal{A}, \upsilonв A

\mathcal{A} \underset{\upsilon}{\models} \forall x (x \doteq x)ще проверим това свойство за производен елемент a \in Aот универсума на структурта.

\mathcal{A} \underset{\upsilon_a^x}{\models} (x \doteq x)  
\iff ||a||^{\mathcal{A}}[\upsilon_a^x] = ||a||^{\mathcal{A}}[\upsilon_a^x]  
\iff \upsilon_a^x(x) = \upsilon_a^x(x)-тук вече е очевидно  
a=a

Сега проверяваме предпоследното свойство

\mathcal{A} \underset{\upsilon}{\models} \varphiза произволни a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n \in A

(1)

\mathcal{A} \underset{\upsilon^{x_1,..,x_n,y_1,...,y_n}_{a_1,...,a_n,b_1,...,b_n}}{\models} \forall x_1... \forall x_n \forall y_1... \forall y_n \ (x_1 \doteq y_1& ... & x_n \doteq y_n) \Rightarrow (p(x_1,..,x_n)=p(y_1,..,y_n))

полагаме \upsilon^{x_1,..,x_n,y_1,...,y_n}_{a_1,...,a_n,b_1,...,b_n} = \omega

(2)

\mathcal{A} \underset{\omega}{\models} \forall x_1... \forall x_n \forall y_1... \forall y_n \ (x_1 \doteq y_1& ... & x_n \doteq y_n) \Rightarrow (p(x_1,..,x_n)=p(y_1,..,y_n))

\iffза произволни a_1,..,b_n \in Aако в \mathcal{A} \underset{\omega}{\models} (x_1 \doteq y_1& ... & x_n \doteq y_n)тогава в  
\mathcal{A} \underset{\omega}{\models} p(x_1,..x_n) = p(y_1,..,y_n)  
Нека \mathcal{A} \underset{\omega}{\models} (x_1 \doteq y_1& ... & x_n \doteq y_n)  
тогава имаме за всяка отделна оценка \mathcal{A} \underset{\omega}{\models} (x_1 \doteq y_1),...,\mathcal{A} \underset{\omega}{\models} ( x_n \doteq y_n)  
от което следва ||x_1||^{\mathcal{A}}[\omega] = ||y_1||^{\mathcal{A}}[\omega],...,||x_n||^{\mathcal{A}}[\omega] = ||y_n||^{\mathcal{A}}[\omega]  
от което следва a_1=b_1,..,a_n=b_n  
ние искаме да докажем \mathcal{A} \underset{\omega}{\models} p(x_1,..,x_n) \iff p(y_1,..,y_n),  
което е равносилно на \mathcal{A} \underset{\omega}{\models} <||x_1||^{\mathcal{A}}[\omega],...,||x_n||^{\mathcal{A}}[\omega]> \in p^{\mathcal{A}}точно когатo <||y_1||^{\mathcal{A}}[\omega],...,||y_n||^{\mathcal{A}}[\omega]> \in p^{\mathcal{A}},  
което е равносилно на <a_1,..,a_n> \in p^{\mathcal{A}}точно когато <b_1,..,b_n> \in p^{\mathcal{A}}

**Аксиоми за равенство**

Нека Eqе двуместен предикатен символ и \mathfrak{L}^{Eq}. С \Gamma_{\mathfrak{L}^{Eq}}да означим горните формули, като \doteqе заместено с Eq, тоест x \doteq x' \rightarrow Eq(x,x')и f(x_1,..,x_n) \doteq f(y_1,...,y_n) \rightarrow Eq(f(x_1,..,x_n), f(y_1,...,y_n))  
Така дефинираното \Gamma_{\mathfrak{L}^{Eq}}наричаме **аксиоми за равенство за езика \mathfrak{L}**

**Твърдение, конгуренция**

Нека \mathcal{A}е структура за \mathfrak{L}^{Eq}. Ако \mathcal{A} \models \Gamma_{\mathfrak{L}^{Eq}}, то са в сила следните:

1. Eq^{\mathcla{A}}- релация на еквивалентност в A;  
2. За произволни a_1,..,a_n,b_1,..,b_nако [a_1]=[b_1],..,[a_n]=[b_n], тo <a_1,..,a_n> \in p^{\mathcal{A}} \iff <b_1,..,b_n> \in p^{\mathcal{A}}  
В този случай се казва, че p^{\mathcal{A}}е съгласуван с Eq^{\mathcal{A}}или  
Eq^{\mathcal{A}}е конгуренция при p^{\mathcal{A}}

3. За произволни a_1,..,a_n,b_1,..,b_nако [a_1]=[b_1],..,[a_n]=[b_n], то [f^{\mathcal{A}}(a_1,...,a_n)]=[f^{\mathcal{A}}(b_1,...,b_n)]  
В този случай се казва, че f^{\mathcal{A}}е съгласуван с Eq^{\mathcal{A}}или  
Eq^{\mathcal{A}}е конгуренция относно f^{\mathcal{A}}

**Дефиниция**

Нека \mathcal{A}е структура за езика \mathfrak{L}. Нека Eе релация на еквивалентност в Aкоято е конгуренция относно f^{\mathcal{A}}за приоизволнo fот \mathfrak{L}.  
Дефинираме структурата A / Eпо следния начин: универсумът на тази структура е Ð� / Ð� = \{ [a]_{E} | a \in A\}(тоест фактормножеството)

* c^{A / E} \leftrightharpoons [c^{\mathcal{A}}]за всички индивидни константи c \in \mathfrak{L}
* [a_1],..,[a_n] \in A / E \leftrightharpoons \{ <[a_1],...,[a_n]> | <a_1,..,a_n> \in p^{A} \}ÿ32ÿÿ33ÿ[[$ f^{A / E}([a_1]_{E},...,[a_n]_E) \leftrightharpoons [f^{\mathcal{A}}(a_1,..,a_n)]_E.

За A / Eказваме че е факторгрупа на Aотносно конгуренцията E.

**Твърдение**

Нека \mathcal{A}е структура за \mathcal{L}, Ð�е конгуренция в A. Нека \upsilonе оценка в A / E.  
Дефинираме оценката \omega : \omega(x) \leftrightharpoons [\upsilon(x)]_{E}.  
Тогава

1. За всеки терм \tauот \mathcal{L}, стойността на \tau\big[ ||\tau||^{\mathcal{A}}[\upsilon]\big] = ||\tau||^{A / E}[\omega]
2. За всяка формула \varphi\mathcal{A} \underset{\upsilon}{\models} \varphi \iff A / E \underset{\omega}{\models} \varphi/asd/
3. За всяка затворена формула \mathcal{A} {\models} \varphi \iff A / E {\models} \varphi

Нека \mathcal{A} \models \Gamma \bigcup \Gamma_{\mathcal{L}^{Eq}}тогава Eq^{\mathcal{A}}е контур в A.