11.Теорема за компактността

**Теоремата от предния път**

Нека е множество от дизюнкти, тогава е неизпълнимо тогава и само тогава, когато 

**Следствие *(Теорема за компактност на изпълнимостта)***

Нека е множество от дизюнкти, тогава е неизпълнимо т.с.т.к. съществува крайно което е неизпълнимо

**Доказателство**:

Нека и е неизпълнимо, тъй като всеки модел на е модел и на , множеството също е неизпълнимо.

Нека е неизпълнимо, тогава . Нека е резолютивен извод от и . Нека дефинираме . е крайно, и , следователно е неизпълнимо. Т.е намерихме крайно неизпълнимо подмножество на .

**Дефиниция *(булево следване)***

Нека е множество от съждителни формули и е съждителна формула. Казваме, че от булево следва , записваме , ако всяка булева интерпретация която е модел за е модел и за .

**Теорема *(компактност на изпълнимостта)***

Нека е множество от съждителни формули. Тогава
(i) е изпълнимо т.с.т.к. всяко крайно е изпълнимо;
(ii) е неизпълнимо т.с.т.к. съществува крайно , което е неизпълнимо.

**Забележка**: Няма ограничение за броя на променливите.
**Забележка 2**: (i) и (ii) са еквивалентни. Ние ще докажем второто.

**Доказателство**:

Нека е булево неизпълнимо множество от съждителни формули.
От всяка съждителна формула (отрицание, конюнкция, дизюнкция, имликация, еквивалентност) може да образуваме конюнктивна нормална форма (конюнкция от дизюнкции) и след това да образуваме дизюнкт от всяка дизюнкция, и да вземем множеството от получените дизюнкти. Т.е от произволна съждителна формула образуваме съответстващото и множество от дизюнкти . Аналогично - ако е множество от съждителни формули дефинираме . Лесно се проверява, че .
По условие е булево неизпълнимо, следователно е неизпълнимо. Но това е множество от дизюнкти, следователно може да приложим [теоремата за компактност на множества от дизюнкти](http://fmi.wikidot.com/lp11#toc1), т.е - съществува крайно , което е неизпълнимо.
Обърнете внимание, че това множество съдържа дизюнкти от разни формули принадлежащи на . Остава да изберем по една формула от за всеки дизюнкт от , такава че дизюнкта да принадлежи на множеството от дизюнкти на формулата. Да си обозначим така избраните формули с . Понеже е неизпълнимо, то и също е неизпълнимо - . С това намерихме крайно неизпълнимо подмножество от произволно неизпълнимо множество от съждителни формули.

Нека е неизпълнимо. Тогава като добавим още формули, то ще продължи да бъде неизпълнимо, т.е е неизпълнимо.

**Теорема *(компактност на булевото следване)***

Нека е множество от съждителни формули и е съждителна формула.
т.с.т.к съществува крайно подмножество , такова че .

**Доказателство**:

Нека е крайно и . Това всъщност означава, че . Нека , т.е е модел за всяка формула в - от тук . От получаваме, че . Получихме, че , следователно .

Нека . Ако е неизпълнимо, то от [теоремата за компактност на изпълнимостта](http://fmi.wikidot.com/lp11#toc3) получаваме, че съществува крайно , което е неизпълнимо. Тогава 1. Сега да се съсредоточим върху случая изпълнимо. Нека разгледаме множеството . Ще докажем, че то е булево неизпълнимо (няма модели). Нека е произволна булева интерпретация. Има две възможности за нея:
(1) . От получаваме, че , т.е . Следователно ;
(2) . Следователно и ;
Следователно за произволно е изпълнено, че - т.е множеството е неизпълномо. От [теоремата за компактност на изпълнимостта](http://fmi.wikidot.com/lp11#toc3) получаваме, че съществува крайно подмножество , което е неизпълнимо. Със сигурност , защото иначе ще се окаже, че , т.е е неизпълнимо (този случай го разгледахме в началото). Сега остава да докажем, че е такова, че . Нека , тогава със сигурност , иначе ще се окаже, че има модел. Т.е имаме, че . Следователно , т.е .

*Горната теорема има хубави приложение в теория на графите.*

**Теорема *(компактност на предикатната изпълнимост)***

Нека е език на предикатното смятане, без формално равенство, нека е множество от затворени формули.
(i) има модел т.с.т.к. всяка крайно има модел.
(ii) е неизпълнимо т.с.т.к. съществува крайно , което е неизпълнимо.

**Забележка**: Тук отново (i) е равносилно на (ii). Ние ще докажем второто.

**Доказателство**:

Нека е крайно подмножество на и е неизпълнимо. Това означава, че няма структура, в която да са верни всички формули от - следователно няма и структура в която са верни всички формули от . Т.е е неизпълнимо.

Идеята е следната. Ще преминем през ПНФ (пренексна нормална форма), след което СНФ (скулемова нормална форма). После образуваме частните случаи на скулемизираните формули. Защо минаваме през всичко това??? Ами частните случаи са просто булеви (съждителни) формули, за които в последните теореми доказахме разни компактности, и сега ще ги използваме. За да се докопаме обаче до булеви формули първо трябва да преминем през ПНФ, СНФ, частни случаи. После трябва да се върнем и наобратно, за да пренесем извода за булеви формули до извод за затворени предикатни формули. **Lets go!**

Нека няма модел. За всяка формула избираме точно една формула , такава че е в ПНФ (Пренексна Нормална Форма) . С множеството означаваме множеството от , за които , т.е множеството от всички пренексни нормални форми на формули от .

Да образуваме - множеството от скулемовите нормални форми на формулите от .

Да разгледаме . По пътя не сме променяли изпълнимостта(-> ПНФ(защото формулите са еквивалентни), [ПНФ->СНФ](http://fmi.wikidot.com/lp8#toc11), [СНФ->Частни Случаи](http://fmi.wikidot.com/lp7#toc8)) следователно е неизпълнимо.

Използваме [теоремата за компактност на изпълнимостта](http://fmi.wikidot.com/lp11#toc3) и получаваме, че съществува крайно , което е неизпълнимо

Сега се връщаме назад.
За всяка формула си взимаме точно една формула , такава че е частен случай на . Нека . .
Ще докажем, че е неизпълнимо. Да разгледаме - то е надмножество на , защото за всяко . Понеже е неизпълнимо, то и е неизпълнимо. [Следователно](http://fmi.wikidot.com/lp7#toc8) е неизпълнимо.

Да си образуваме множеството от формули, чиито скулемови нормални форми са в множеството , т.е . . От неизпълнимо [следва](http://fmi.wikidot.com/lp8#toc11) неизпълнимо.

Да си образуваме множеството от формули, чиито пренексни нормални форми са в множеството , т.е . . Понеже всяка формула е еквивалентна с пренексната си нормална форма, то е неизпълнимо. Тъй като , то е крайно.

Т.е намерихме крайно подмножество на което е неизпълнимо.

Footnotes

1. от неизпълнимо множество следва всяка формула