11.Теорема за компактността

**Теоремата от предния път**

Нека Sе множество от дизюнкти, тогава Sе неизпълнимо тогава и само тогава, когато S \overset{r}{\vdash} \blacksquare

**Следствие *(Теорема за компактност на изпълнимостта)***

Нека Sе множество от дизюнкти, тогава Sе неизпълнимо т.с.т.к. съществува крайно S_0 \subseteqq Sкоето е неизпълнимо

**Доказателство**:  
|\Leftarrow|  
Нека S_0 \subseteqq Sи S_0е неизпълнимо, тъй като всеки модел на Sе модел и на S_0, множеството Sсъщо е неизпълнимо.  
|\Rightarrow|  
Нека Sе неизпълнимо, тогава S \overset{r}{\vdash} \blacksquare. Нека D_1, \dots, D_nе резолютивен извод от Sи D_n = \blacksquare. Нека дефинираме S_0 = \{ D_1, \dots, D_n \} \cap S. S_0е крайно, S_0 \subseteqq Sи S_0 \overset{r}{\vdash} \blacksquare, следователно S_0е неизпълнимо. Т.е намерихме крайно неизпълнимо подмножество на S.

**Дефиниция *(булево следване)***

Нека \Deltaе множество от съждителни формули и \varphiе съждителна формула. Казваме, че от \Deltaбулево следва \varphi, записваме \Delta \overset{b}\models \varphi, ако всяка булева интерпретация Iкоято е модел за \Deltaе модел и за \varphi.

**Теорема *(компактност на изпълнимостта)***

Нека \Deltaе множество от съждителни формули. Тогава  
(i) \Deltaе изпълнимо т.с.т.к. всяко крайно \Delta_0 \subseteq \Deltaе изпълнимо;  
(ii) \Deltaе неизпълнимо т.с.т.к. съществува крайно \Delta_0 \subseteq \Delta, което е неизпълнимо.

**Забележка**: Няма ограничение за броя на променливите.  
**Забележка 2**: (i) и (ii) са еквивалентни. Ние ще докажем второто.

**Доказателство**:  
|\Rightarrow|  
Нека \Deltaе булево неизпълнимо множество от съждителни формули.  
От всяка съждителна формула (отрицание, конюнкция, дизюнкция, имликация, еквивалентност) може да образуваме конюнктивна нормална форма (конюнкция от дизюнкции) и след това да образуваме дизюнкт от всяка дизюнкция, и да вземем множеството от получените дизюнкти. Т.е от произволна съждителна формула \varphiобразуваме съответстващото и множество от дизюнкти S_\varphi. Аналогично - ако Mе множество от съждителни формули дефинираме S_M = \{ S_\varphi\ |\ \varphi \in M \}. Лесно се проверява, че I \models M \longleftrightarrow I \models S_M.  
По условие \Deltaе булево неизпълнимо, следователно S_\Deltaе неизпълнимо. Но това е множество от дизюнкти, следователно може да приложим [теоремата за компактност на множества от дизюнкти](http://fmi.wikidot.com/lp11#toc1), т.е - съществува крайно S_0 \subseteq S_\Delta, което е неизпълнимо.  
Обърнете внимание, че това множество съдържа дизюнкти от разни формули принадлежащи на \Delta. Остава да изберем по една формула от \Deltaза всеки дизюнкт от S_0, такава че дизюнкта да принадлежи на множеството от дизюнкти на формулата. Да си обозначим така избраните формули с \Delta_0. Понеже S_0е неизпълнимо, то и \Delta_0също е неизпълнимо - S_{\Delta_0} \supseteq S_0. С това намерихме крайно неизпълнимо подмножество от произволно неизпълнимо множество от съждителни формули.  
|\Leftarrow|  
Нека \Delta_0е неизпълнимо. Тогава като добавим още формули, то ще продължи да бъде неизпълнимо, т.е \Delta \supseteq \Delta_0е неизпълнимо.

**Теорема *(компактност на булевото следване)***

Нека \Deltaе множество от съждителни формули и \varphiе съждителна формула.  
\Delta \overset{b}\models \varphiт.с.т.к съществува крайно подмножество \Delta_0 \subseteq \Delta, такова че \Delta_0 \overset{b}\models \varphi.

**Доказателство**:  
|\Leftarrow|  
Нека \Delta_0 \subseteq \Deltaе крайно и \Delta_0 \overset{b}\models \varphi. Това всъщност означава, че I \models \Delta_0 \rightarrow I \models \varphi \qquad (\star). Нека I \models \Delta, т.е Iе модел за всяка формула в \Delta- от тук I \models \Delta_0. От (\star)получаваме, че I \models \varphi. Получихме, че I \models \Delta \rightarrow I \models \varphi, следователно \Delta \overset{b}\models \varphi.  
|\Rightarrow|  
Нека \Delta \overset{b}\models \varphi. Ако \Deltaе неизпълнимо, то от [теоремата за компактност на изпълнимостта](http://fmi.wikidot.com/lp11#toc3) получаваме, че съществува крайно \Delta_0 \subseteq \Delta, което е неизпълнимо. Тогава \Delta_0 \models \varphi[1](javascript:;). Сега да се съсредоточим върху случая \Deltaизпълнимо. Нека разгледаме множеството \Delta \cup \{ \lnot \varphi \}. Ще докажем, че то е булево неизпълнимо (няма модели). Нека Iе произволна булева интерпретация. Има две възможности за нея:  
(1) I \models \Delta. От \Delta \models \varphiполучаваме, че I \models \varphi, т.е I \nvDash \lnot \varphi. Следователно I \nvDash \Delta \cup \{ \lnot \varphi \};  
(2) I \nvDash \Delta. Следователно и I \nvDash \Delta \cup \{ \lnot \varphi \};  
Следователно за произволно Iе изпълнено, че I \nvDash \Delta \cup \{ \lnot \varphi \}- т.е множеството е неизпълномо. От [теоремата за компактност на изпълнимостта](http://fmi.wikidot.com/lp11#toc3) получаваме, че съществува крайно подмножество \Delta_0 \subseteq \Delta \cup \{ \lnot \varphi \}, което е неизпълнимо. Със сигурност \{ \lnot \varphi \} \in \Delta_0, защото иначе ще се окаже, че \Delta_0 \subseteq \Delta, т.е \Deltaе неизпълнимо (този случай го разгледахме в началото). Сега остава да докажем, че \Delta_0' = \Delta_0 \setminus \{ \lnot \varphi \}е такова, че \Delta_0' \overset{b}\models \varphi. Нека I \models \Delta_0', тогава със сигурност I \nvDash \{ \lnot \varphi \}, иначе ще се окаже, че \Delta_0има модел. Т.е имаме, че I \models \varphi. Следователно I \models \Delta_0' \rightarrow I \models \varphi, т.е \Delta_0' \overset{b}\models \varphi.

*Горната теорема има хубави приложение в теория на графите.*

**Теорема *(компактност на предикатната изпълнимост)***

Нека \mathcal{L}е език на предикатното смятане, без формално равенство, нека \Gammaе множество от затворени формули.  
(i) \Gammaима модел т.с.т.к. всяка крайно \Gamma_0 \subseteq \Gammaима модел.  
(ii) \Gammaе неизпълнимо т.с.т.к. съществува крайно \Gamma_0 \subseteq \Gamma, което е неизпълнимо.

**Забележка**: Тук отново (i) е равносилно на (ii). Ние ще докажем второто.

**Доказателство**:  
|\Leftarrow|  
Нека \Gamma_0е крайно подмножество на \Gammaи \Gamma_0е неизпълнимо. Това означава, че няма структура, в която да са верни всички формули от \Gamma_0- следователно няма и структура в която са верни всички формули от \Gamma. Т.е \Gammaе неизпълнимо.  
|\Rightarrow|  
Идеята е следната. Ще преминем през ПНФ (пренексна нормална форма), след което СНФ (скулемова нормална форма). После образуваме частните случаи \mathrm{Si}на скулемизираните формули. Защо минаваме през всичко това??? Ами частните случаи са просто булеви (съждителни) формули, за които в последните теореми доказахме разни компактности, и сега ще ги използваме. За да се докопаме обаче до булеви формули първо трябва да преминем през ПНФ, СНФ, частни случаи. После трябва да се върнем и наобратно, за да пренесем извода за булеви формули до извод за затворени предикатни формули. **Lets go!**

Нека \Gammaняма модел. За всяка формула \varphi \in \Gammaизбираме точно една формула \varphi', такава че \varphi'е в ПНФ (Пренексна Нормална Форма) \varphi {|=|} \varphi'. С множеството \Gamma'означаваме множеството от \varphi', за които \varphi \in \Gamma, т.е множеството от всички пренексни нормални форми на формули от \Gamma.

Да образуваме \Gamma'^{S}- множеството от скулемовите нормални форми на формулите от \Gamma'.

Да разгледаме \mathrm{Si}(\Gamma'^{S}). По пътя не сме променяли изпълнимостта(-> ПНФ(защото формулите са еквивалентни), [ПНФ->СНФ](http://fmi.wikidot.com/lp8#toc11), [СНФ->Частни Случаи](http://fmi.wikidot.com/lp7#toc8)) следователно \mathrm{Si}(\Gamma'^S)е неизпълнимо.

Използваме [теоремата за компактност на изпълнимостта](http://fmi.wikidot.com/lp11#toc3) и получаваме, че съществува крайно \Delta \subseteq \mathrm{Si}(\Gamma'^S), което е неизпълнимо

Сега се връщаме назад.  
За всяка формула \theta \in \Deltaси взимаме точно една формула \varphi_\theta, такава че \thetaе частен случай на \varphi_\theta. Нека X = \{ \varphi_\theta\ |\ \theta \in \Delta \}. X \subseteq \Gamma'^S.  
Ще докажем, че Xе неизпълнимо. Да разгледаме \mathrm{Si}(X)- то е надмножество на \Delta, защото \theta \in \mathrm{Si}(\varphi_\theta)за всяко \varphi_\theta \in X. Понеже \Deltaе неизпълнимо, то и \mathrm{Si}(X)е неизпълнимо. [Следователно](http://fmi.wikidot.com/lp7#toc8) Xе неизпълнимо.

Да си образуваме множеството Yот формули, чиито скулемови нормални форми са в множеството X, т.е Y = \{ \varphi'\ |\ \varphi'^S \in X \}. Y \subseteq \Gamma'. От Xнеизпълнимо [следва](http://fmi.wikidot.com/lp8#toc11) Yнеизпълнимо.

Да си образуваме множеството \Gamma_0от формули, чиито пренексни нормални форми са в множеството Y, т.е \Gamma_0 = \{ \varphi\ |\ \varphi' \in Y \}. \Gamma_0 \subseteq \Gamma. Понеже всяка формула е еквивалентна с пренексната си нормална форма, то \Gamma_0е неизпълнимо. Тъй като |\Delta| = |X| = |Y| = |\Gamma_0|, то \Gamma_0е крайно.

Т.е намерихме крайно подмножество на \Gammaкоето е неизпълнимо.

Footnotes

[1](javascript:;). от неизпълнимо множество следва всяка формула