10. Трансверзали на фамилии от множества.

Минимални трансверзали

Трансверзала (която вече сме учили в стереометрията) е права свързваща две кръстосани прави. Всеки две кръстосани прави имат безброй много трансверзали.  
Фамилия от множества е множество съдържащо като елементи други множества, съответно трансверзала на тези множества ще е множество което пресича всяко множество от фамилията.

**Дефиниция трансверзала**

Нека \mathfrak{X}е фамилия от множества. Казваме, че множеството Xе трансверзала за фамилията \mathfrak{X}, ако за (\forall y \in \mathfrak{X})(y \cap X \neq \varnothing)

**НДУ за трансверзали**

\mathfrak{X}има трансверзали \iff (\forall x \in \mathfrak{X})(x \neq \varnothing)

**Доказателство**:  
|\Rightarrow|Нека Yе трансверзала за \mathfrak{X}. Избираме произволен елемент x \in \mathfrak{X}тогава x \cap Y \neq \varnothing, в частност x \neq \varnothing  
|\Leftarrow|Нека (\forall x \in \mathfrac{X})(x \neq \varnothing).  
Дефинираме Y \rightleftharpoons \underset{x \in \mathfrak{X}}{\bigcup}x.  
Твърдим, че Yе трансверзала за \mathfrak{X}. Нека y \in \mathfrak{X}, тогава y \subseteqq Y , \ y \cap Y = y \neq \varnothingследователно Yе трансверзала.

**Минимална трансверзала**

Нека \mathfrak{X}е фамилия от множества. За едно множество Yще казваме, че е минимална трансверзала за \mathfrak{X}ако:

(1) Yе трансверзала за \mathfrak{X}  
(2') за всяко a \in Yе вярно, че Y \setminus \{ a\}не е трансверзала за \mathfrac{X}(махайки произволен елемент на Yполучаваме не-трансверзала)  
(2'') за всяко Y_1 \subset Y, \ Y_1 \neq Yмножеството Y_1не е трансверзала за \mathfrac{X}(всяко същинско подмножество на Yне е трансверзала)

Както може би се досещате, \mbox{2}' \iff \mbox{2}''

**Твърдение НДУ за минимална трансверзала**

Нека Yе трансверзала за \mathfrak{X}, следните две условия са еквивалентни

1. Yе минимална трансверзала
2. За всяко a \in Y , \exists x_a \in \mathftak{X}, такова че x_a \cap Y = \{a\}

**Доказателство**:  
1 \Rightarrow 2  
Нека Ye минимална трансверзала за \mathfrak{X}. Следователно съществува елемент x_0 \in \mathfrak{X}, такъв че x_0 \cap Y \setminus \{a\} = \varnothing. Да вземем един такъв елемент[1](javascript:;) x_0. За него имаме x_0 \cap Y \neq \varnothingследователно x_0 \cap Y = \{a\}, тоест x_a \leftrightharpoons x_0

1 \Leftarrow2  
Нека за \forall a \in Y, \exists x_a \in \mathfrak{X}, такова че x_a \cap Y = \{a\}  
Нека a \in Yтогава избираме x_a \in \mathfrak{X}, така че x_a \cap Y = \{a\}  
Да разгледаме (Y \setminus \{a\}) \cap x_a = \varnothingтогава Y \setminus \{a\}не е трансверзала за \mathfrak{X}, ae случайно следователно  
Ye мин. трансверзала за \mathfrak{X}.

**Наблюдение *(съществуват фамилии без минимална трансверзала)***

Въпрос: Съществува ли минимална трансверзала за всяка фамилия от множества \mathfrak{X}?  
Отговор: **Не**.  
Пример:  
\mathfrak{X} = \{ \{k| n \leq k \}| n \in \mathbb{N} \}- на човешки език: \mathfrak{X} = \{ [0, +\infty), [1, +\infty), \cdots, [n, +\infty), \cdots \}(Разглеждаме само интервали от естествени числа, не реални!).  
Това \mathfrak{X}няма минимална трансверзала

**Доказателство**: Да допуснем, че Y_0e мин. трансверзала за \mathfrak{X}.  
Да разгледаме произволно a \in Y_0. За него съществува x_a \in \mathfrak{X}, такова че x_a \cap Y_0 = \{a\}(от [горното](http://fmi.wikidot.com/lp10#toc3) твърдение).  
От друга страна, понеже x_Ð° \in \mathfrak{X}знаем, че x_a = [n_0,+\infty), за някое n_0 \in \mathbb{N}.

Както виждате x_aсъдържа всички естествени числа, по-големи от n_0, и даже от a. Понеже x_a \cap Y_0 = \{a\}, то в Y_0няма по-големи елементи от a- ако имаше те щяха да принадлежат и на x_aи следователно и на сечението им.  
Сега тривиално получаваме, че Y \cap [a+1, +\infty) = \varnothing, и понеже [a+1, +\infty) \in \mathfrak{X}следователно Y_0не е трансверзала. Противоречие! Следователно не съществува минимална трансверзала за \mathfrak{X}.

**Теорема за минимална трансверзала**

Нека \mathfrak{X}е фамилия от изброимо много **крайни** непразни множества. Тогава \mathfrak{X}има минимална трансверзала.  
**Забележка**: Теоремата е вярна и за фамилии с по-голяма мощност (от изброима), но не ни достигат знания да го докажем, а и не ни трябва за по-нататък.

**Доказателство**: Нека X_0, X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdotsса всички елементи на \mathfrak{X}[2](javascript:;), и Y_0 = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_iе обединението на всички тях. Тогава Y_0е най-много изброимо и нека x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdotsса неговите елементи (т.е това са всъщност всички елементи на X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdotsзаписани в редичка).  
С индукция относно nще дефинираме реда Y_0, Y_1, \cdots:  
Вече дефинирахме Y_0.  
Приемаме, че Y_nе дефинирано.  
Дефинираме Y_{n+1}по следния начин:

(1)

Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n & \mbox{if } Y_n \setminus \{x_n\} \mbox{ is not a transversal for } \mathfrak{X} \ Y_n \setminus \{x_n\} & \mbox{if } Y_n \setminus \{x_n\} \mbox{ is a transversal for } \mathfrak{X} \end{cases}

Грубо казано изхвърляме елементите, които не са *критични* за трансверзалата - колкото по-нататък се движим по редицата, толкова повече елементи сме изхвърлили (евентуално).  
Така получаване редица със следното свойство Y_0 \supseteqq Y_1 \supseteqq Y_2 \supseteqq \cdots \supseteqq Y_n \supseteqq Y_{n+1} \supseteqq \cdotsи за всяко nимаме, че Y_nе трансверзала за \mathfrak{X}.  
Сега си избираме сечението на всички елементи от редицата: Y \rightleftharpoons \bigcap_{i=0}^{\infty} Y_i. Твърдим, че Yе мин. трансверзала за \mathfrak{X}. Достатъчно е да докажем, че Yе трансверзала за \mathfrak{X}- това, че е минимална следва от построението и сечението на Y_n.  
Доказателство, че Yе трансверзала за \mathfrak{X}:  
Нека X \in \mathfrak{X}е произволно. Тогава съществува n_0 \in \mathbb{N}, такова че X = X_{n_0}(всички елементи на \mathfrak{X}са *номерирани*).  
X_{n_0}е крайно множество по условие. Нека то е образувано от елементите \{ x_{n_0^0}, x_{n_0^1}, \cdots, x_{n_0^p} \}.[3](javascript:;). Да си изберем такова n_1, че (\forall i \in \{ 0, 1, \cdots, p\})(n_1 > n_0^i). (просто взимаме максимума им и прибавяме единица) - по друг начин казано (\forall n \ge n_1)(x_n \notin X_{n_0}).  
Сега остава да разгледаме Y_{n_1}- то е трансверзала следователно Y_{n_1} \cap X_{n_0} \ne \varnothing, и от друга страна Y_{n_1} \cap X_{n_0} = Y \cap X_{n_0}, защото елементите след Y_{n_1}в редицата се различават от Y_{n_1}евентуално от премахване на някои x_i, които със сигурност не са от X_{n_0}- на всяка стъпка след n_1вата евентуално ще махаме xсъс индекс по-голям или равен на n_1, а индексите на всички xот X_{n_0}бяха по-малки от n_1заради избора на n_1.  
Следователно доказахме, че X \cap Y \ne \varnothingза произволно X \in \mathfrak{X}. Следователно Yе трансверзала за \mathfrak{X}.

**Теорема за пълнотата на дизюнктивна изпълнимост**

Нека Sе неизпълнимо множество от изпълними дизюнкции, тогава S \overset{r}\vdash \blacksquare

**Доказателство**:  
Нека Sе неизпълнимо. Да допуснем, че S \nvdash \blacksquare, следователно \blacksquare \notin S^*. Значи всеки елемент Dна S^*e крайно непразно множество от литерали.  
От теоремата за мин. трансверзали знаем, че S^*има минимална трансверзала. Нека Aе минимална трансверзала за S^*.  
В Aне съществува контрарна двойка литерали. Да допуснем, че има - тогава от необходимото условие за мин трансверзала, получаваме, че съществуват D_1, D_2 \in S^*, такива че D_1 \cap A = \{ P \}и D_2 \cap A = \{ \lnot P \}. Не е трудно да се види, че D = \mathcal{R}_P(D_1, D_2) \cap A = \varnothing, и D \in S^*, което противоречи на факта, че Aе трансверзала.  
След като се убедихме, че няма контрарна двойка литерали може да дефинираме булева интерпретация на променливите, която зависи от присъствието им в A. По конкретно:

(2)

I(P) = \begin{cases} \mathrm{true} & P \in A \ \mathrm{false} & P \notin A \ \end{cases}

Т.е даваме положителна стойност на всички литерали без отрицание, участващи в A. Сега ще докажем, че I \models S^*.  
Нека D \in S^*е произволен дизюнкт. Понеже D \cap A \ne \varnothing, то съществува поне един литерал L \in D \cap A. Да разгледаме два случая за L:  
(1) L = P- т.е Lе съждителна променлива. От дефиницията на Iзаключаваме, че I(P) = \mathrm{true}, следователно и I \models D.  
(2) L = \lnot P- т.е Lе отрицание на съждителна променлива. \lnot P \in A, следователно P \notin A, т.е I(P) = \mathrm{false}, от където I \models D.  
Както виждате и в двата случая I \models D, за произволен дизюнкт D \in S.  
Доказахме, че I \models S. Противоречие - Sе неизпълнимо. Следователно S \overset{r}\vdash \blacksquare.

**Забележка**: Всъщност доказахме едната посока на теоремата за пълнота - другата е [доказана](http://fmi.wikidot.com/lp9#toc21) в предната лекция.

Footnotes

[1](javascript:;). ако още не сте се усетили Тинко обича да прави разсъждения от вида: *Съществува елемент със свойство X. Да си вземем едно такова x_0*. По всички други предмети просто сме казвали - *Съществува x_0със свойство X*. По по-дългия начин е по-коректен математически - имаме \exists x\varphi \Rightarrow \varphi[x/\tau]. Без паника ;-)

[2](javascript:;). тука използваме, че фамилията \mathfrak{X}е изброима

[3](javascript:;). странните индекси са, за да покажа че това са елементи на X_{n_0}и едновременно с това са и подмножество на\{ x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots \}