10. Трансверзали на фамилии от множества.

Минимални трансверзали

Трансверзала (която вече сме учили в стереометрията) е права свързваща две кръстосани прави. Всеки две кръстосани прави имат безброй много трансверзали.
Фамилия от множества е множество съдържащо като елементи други множества, съответно трансверзала на тези множества ще е множество което пресича всяко множество от фамилията.

**Дефиниция трансверзала**

Нека е фамилия от множества. Казваме, че множеството е трансверзала за фамилията , ако за 

**НДУ за трансверзали**

има трансверзали 

**Доказателство**:
Нека е трансверзала за . Избираме произволен елемент тогава , в частност 
Нека .
Дефинираме .
Твърдим, че е трансверзала за . Нека , тогава следователно е трансверзала.

**Минимална трансверзала**

Нека е фамилия от множества. За едно множество ще казваме, че е минимална трансверзала за ако:

(1) е трансверзала за 
(2') за всяко е вярно, че не е трансверзала за (махайки произволен елемент на получаваме не-трансверзала)
(2'') за всяко множеството не е трансверзала за (всяко същинско подмножество на не е трансверзала)

Както може би се досещате, 

**Твърдение НДУ за минимална трансверзала**

Нека е трансверзала за , следните две условия са еквивалентни

1. е минимална трансверзала
2. За всяко , такова че 

**Доказателство**:

Нека e минимална трансверзала за . Следователно съществува елемент , такъв че . Да вземем един такъв елемент1 . За него имаме следователно , тоест 


Нека за , такова че 
Нека тогава избираме , така че 
Да разгледаме тогава не е трансверзала за , e случайно следователно
e мин. трансверзала за .

**Наблюдение *(съществуват фамилии без минимална трансверзала)***

Въпрос: Съществува ли минимална трансверзала за всяка фамилия от множества ?
Отговор: **Не**.
Пример:
- на човешки език: (Разглеждаме само интервали от естествени числа, не реални!).
Това няма минимална трансверзала

**Доказателство**: Да допуснем, че e мин. трансверзала за .
Да разгледаме произволно . За него съществува , такова че (от [горното](http://fmi.wikidot.com/lp10#toc3) твърдение).
От друга страна, понеже знаем, че , за някое .

Както виждате съдържа всички естествени числа, по-големи от , и даже от . Понеже , то в няма по-големи елементи от - ако имаше те щяха да принадлежат и на и следователно и на сечението им.
Сега тривиално получаваме, че , и понеже следователно не е трансверзала. Противоречие! Следователно не съществува минимална трансверзала за .

**Теорема за минимална трансверзала**

Нека е фамилия от изброимо много **крайни** непразни множества. Тогава има минимална трансверзала.
**Забележка**: Теоремата е вярна и за фамилии с по-голяма мощност (от изброима), но не ни достигат знания да го докажем, а и не ни трябва за по-нататък.

**Доказателство**: Нека са всички елементи на 2, и е обединението на всички тях. Тогава е най-много изброимо и нека са неговите елементи (т.е това са всъщност всички елементи на записани в редичка).
С индукция относно ще дефинираме реда :
Вече дефинирахме .
Приемаме, че е дефинирано.
Дефинираме по следния начин:

(1)



Грубо казано изхвърляме елементите, които не са *критични* за трансверзалата - колкото по-нататък се движим по редицата, толкова повече елементи сме изхвърлили (евентуално).
Така получаване редица със следното свойство и за всяко имаме, че е трансверзала за .
Сега си избираме сечението на всички елементи от редицата: . Твърдим, че е мин. трансверзала за . Достатъчно е да докажем, че е трансверзала за - това, че е минимална следва от построението и сечението на .
Доказателство, че е трансверзала за :
Нека е произволно. Тогава съществува , такова че (всички елементи на са *номерирани*).
е крайно множество по условие. Нека то е образувано от елементите .3. Да си изберем такова , че . (просто взимаме максимума им и прибавяме единица) - по друг начин казано .
Сега остава да разгледаме - то е трансверзала следователно , и от друга страна , защото елементите след в редицата се различават от евентуално от премахване на някои , които със сигурност не са от - на всяка стъпка след вата евентуално ще махаме със индекс по-голям или равен на , а индексите на всички от бяха по-малки от заради избора на .
Следователно доказахме, че за произволно . Следователно е трансверзала за .

**Теорема за пълнотата на дизюнктивна изпълнимост**

Нека е неизпълнимо множество от изпълними дизюнкции, тогава 

**Доказателство**:
Нека е неизпълнимо. Да допуснем, че , следователно . Значи всеки елемент на e крайно непразно множество от литерали.
От теоремата за мин. трансверзали знаем, че има минимална трансверзала. Нека е минимална трансверзала за .
В не съществува контрарна двойка литерали. Да допуснем, че има - тогава от необходимото условие за мин трансверзала, получаваме, че съществуват , такива че и . Не е трудно да се види, че , и , което противоречи на факта, че е трансверзала.
След като се убедихме, че няма контрарна двойка литерали може да дефинираме булева интерпретация на променливите, която зависи от присъствието им в . По конкретно:

(2)



Т.е даваме положителна стойност на всички литерали без отрицание, участващи в . Сега ще докажем, че .
Нека е произволен дизюнкт. Понеже , то съществува поне един литерал . Да разгледаме два случая за :
(1) - т.е е съждителна променлива. От дефиницията на заключаваме, че , следователно и .
(2) - т.е е отрицание на съждителна променлива. , следователно , т.е , от където .
Както виждате и в двата случая , за произволен дизюнкт .
Доказахме, че . Противоречие - е неизпълнимо. Следователно .

**Забележка**: Всъщност доказахме едната посока на теоремата за пълнота - другата е [доказана](http://fmi.wikidot.com/lp9#toc21) в предната лекция.

Footnotes

1. ако още не сте се усетили Тинко обича да прави разсъждения от вида: *Съществува елемент със свойство . Да си вземем едно такова *. По всички други предмети просто сме казвали - *Съществува със свойство *. По по-дългия начин е по-коректен математически - имаме ![\exists x\varphi \Rightarrow \varphi[x/\tau]](). Без паника ;-)

2. тука използваме, че фамилията е изброима

3. странните индекси са, за да покажа че това са елементи на и едновременно с това са и подмножество на