# Упражнение 10

Пренексна нормална форма

**Задача 1**

(1)

\varphi \land \exists x \psi |=|\neg \neg(\varphi \land \exists x \psi) |=| \neg (\neg \varphi \land \neg \exists x \psi) |=| \neg (\neg \varphi \land \forall x \neg\psi) |=| \neg \forall x (\neg \varphi \land \neg \psi) |=| \exists x (\neg(\neg\varphi \land \neg \psi)) |=| \exists x (\varphi \lor \psi)

аналогично за \varphi \lor \exists x \psi

**Задача 2**

\varphi \rightarrow \exists x \psi |=| \exists x (\varphi \rightarrow \psi)  
По втори начин  
\varphi \rightarrow \exists x \psi |=| \neg \varphi \lor \exists x \psi |=| \exists x (\neg \varphi \lor \psi) |=| \exists x (\varphi \rightarrow \psi)

**Задача 3**

(2)

(\exists x \psi)\rightarrow \varphi |=| \neg \exists x \psi \land \varphi |=| \forall x \neg \psi \land \varphi |=| \forall x (\psi \rightarrow \varphi)

**Задача 4**

(3)

\varphi \leftrightarrow \exists x \psi |=| (\varphi \rightarrow \exists x \psi) \land (\exists x \psi \rightarrow \varphi) |=| \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \land \forall x(\psi \rightarrow \varphi) |=| \exists x( (\varphi \rightarrow \psi) \land \forall x(\psi \rightarrow \varphi) ) |=| \exists x \forall z ((\varphi \rightarrow \psi) \land (\psi [x / z] \rightarrow \varphi[x / z]))

тук заместихме xсъс zи изнесохме квантора.  
В случая няма значение наредбата на кванторите в ПНФ, но в други случай има значение ето такъв пример  
\exists x \forall y p(x,y)и \forall y \exists x p(x,y)

**"Дистрибутивни" закони**

\forall x (\varphi \land \psi) |=| \forall x \varphi \land \forall x \psi- не е вярно за \lor  
\exists x (\varphi \lor \psi) |=| \exists x \varphi \lor \exists x \psi- не е вярно за \land

**Алгоритъм за привеждане в ПНФ**

1. Първо премахваме \leftrightarrow,\rightarrow
2. Преместваме \negдо атомите
3. Извеждаме кванторите, като преименуваме при нужда

За първото използваме следните праивла

\neg(\varphi \overset{\land}{\lor} \varpsi) |=| \neg\varphi \overset{\lor}{\land} \neg \varpsi- законите на деморган  
\neg\neg \psi |=| \psi  
\varphi \rightarrow \psi |=| \neg \varphi \lor \psi  
\varphi \leftrightarrow \psi |=| (\varphi)\land(\psi) |=| (\neg \varphi \lor \psi)\land(\neg \psi \lor \varphi)  
\neg\exists \varphi |=| \forall x \neg \varphi

**Задача 5**

\forall x \forall y (p(x,y)\leftrightarrow\exists z ( p(z,x) \land p (z,y)))  
\forall x \forall y (( \neg p(x,y) \lor \exists x (p(z,x) \land p(z,y))) \land (p(x,y) \lor \neg \exists x (p(z,x) \land p(z,y))))  
\forall x \forall y (\exists z (\neg p(x,y) \lor (p(z,x)\land p(z,y)) \land (\forall z (p(x,y) \lor (\neg p(z,x)\lor\neg p(z,y)))

\forall x \forall y \exists z ( \neg p(x,y) \lor (p(z,x) \land p(z,y)) \land \forall z (p(x,y) \lor (\neg p(z,x) \lor \neg p (z,y))  
\forall x \forall y \exists z \forall z_1(\neg p(x,y)\lor (p(z,x)\land p(z,y)) \land ( p(x,y) \lor (\neg p(z_1,x) \lor \neg p(z_1,y))

**Задача 6**

\forall x p(x) \rightarrow \exists y (q(y,x)\land \neg q(x,y))  
\neg \forall x p(x) \lor \exists y (q(y,x) \land \neg q (x,y)  
\exists x \neg p (x) \lor \exists y (q(y,x) \land \neg q (x,y))  
\exists y (\exists x \neg p(x) \lor (q(y,x) \land \neg q (x,y)))  
\exists y \exists x_1 ( \neg p(x_1) \lor (q(y,x) \land \neg q(x,y)))

**Задача 7**

(\forall x \exists x p(z,x)) \rightarrow (\exists x q(x)\rightarrow \forall x \forall y p(x,y))  
\neg \forall x \exists z p (z,x) \lor ( \neg \exists x q(x) \lor \forallx \forall y p(x,y))  
\exists x \forall z \neg p (z,x) \lor \forall x \neg q(x) \lor \forall x \forall y p(x,y))  
\exists x \forall z (\neg p(z,x) \lor \forall x \neg q(x) \lor \forall x \forall y p(x,y))

\exists x \forall z \forall x_1 (\neg p(z,x) \lor \neg q(x_1) \lor \forall x \forall y p(x,y))  
\exists x \forall z \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1(\neg p(z,x) \lor \neg q(x_1) \lor p(x_2,y_1))