Първо ще разгледаме **съждителни** езици.  
Те са като **предикатните**[1](javascript:;), но нямат предикати :-)

Var = \{x_1,....,x_n,...\}

**Дефиниция: Формула**

1. променливите са формули  
2. ако \varphi, \psi- формули, тогава и \neg \psi , (\varphi \land \psi ),(\varphi \lor \psi ),(\varphi \rightarrow \psi ),(\varphi \leftrightarrow \psi ),са формули

**Семантика**

I- интерпретация  
I:Var \rightarrow \{t,f\}, интерпретацията казва кои са верни  
(може да е подмножество на Var- т.е да показва кои променливи са верни (които не са от подмножеството са неверни))

**Дефиниция интерпретация**

I \models \varphi- при интерпретация Iе вярна \varphi  
I \models x \leftrightarrow I(x) = t  
I \models \neg x \leftrightarrow I(x) = f  
I \models \varphi \And \psi \leftrightarrow I \models \psiи I \models \varphi  
I \models \varphi \lor \psi \leftrightarrow I \models \psiили I \models \varphi  
I \models \varphi \Rightarrow \psi \leftrightarrowако I \models \psiто I \models \varphi  
(Горното вярно ли е? Ако I не е модел за phi то от формулата не можем да заключим нищо за psi. Тоест, според мен, е възможно I да е модел за psi но да не е за phi. Което сме записали на лекции е, че или I не е модел за phi или I е модел за psi. by espr1t)  
I \models \varphi \iff \psi \leftrightarrow I \models \psiт.с.т.к. I \models \varphi

**Дефиниция тавтология**

Бележим \models \varphiи казваме, че \varphiе тавтология, ако \varphiе вярна при всяка интерпретация.

**Още малко за интерпретацията**

Ще записваме \Sigma \models \Gammaкъдето \Sigmaи \Gammaса множества от формули, aко от I \models \Sigmaследва I \models \Gamma, т.е всеки модел на първото е модел на второто.  
Принципно може вместо множества да пишем и просто единични формули \varphiвместо \{ \varphi \}- няма да се шашкате :)

\varnothing \models \varphi- това означава, че празното множество формули е вярно тогава, когато е вярно \varphi. Но празното множество е вярно при всяка интерпретация, следователно и \varphiе вярна при всяка интерпретация. Т.е \varphiе тавталогия. Записваме просто \models \varphi.

**Дефиниция: логическо противоречие**

Логическото противоречие е нещо като тавтологичен абсурд - т.е винаги грешно. Тоест когато не съшествува нито една интерпретация за която I \models \varphi, където \varphiе формула. Казваме, че \varphiе логическо противоречие.

**Задача 1**

Имаме  
1.\varphi не е логическо противоречие (т.е \exists I_1 \models \varphi)  
2.\psi не е тавтология (т.е \exists I_2 \models \neg \psi)  
3.\varphi \models \psi - всеки модел за \varphiе модел и за \psi  
Да се докаже, че Var(\varphi) \cap Var(\psi) \neq \varnothing

Решение:  
Допускаме противното т.е., че Var(\varphi) \cap Var(\psi) = \varnothing

Построяваме си интерпретацията  
k(y) = \begin{cases} I_1(y), y \in Var(\varphi) \\ I_2(y), y \notin Var(\varphi) \end{cases}  
k \models \varphiот 3. k \models \psi, но k \models \neg \psi- противоречие, следователно сечението не е празно.

Сега ще говорим за предикатния случай (това дето го разглеждахме на лекции първите пъти).

**Формули**

Атомарни формули  
Ако pе n-местен предикатен символ, а \tau_1,...,\tau_n- термове, тогава p(\tau_1,..,\tau_n)- атомарна формула  
1. Атомарните формули са функции.  
2. Ако \psiи \varphiса формули, тогава и \neg \varphi, \psi \land \varphi,\psi \lor \varphi, \psi \rightarrow \varphi,\psi \leftrightarrow \varphiса формули  
Формули са и \forall x \varphi, \exists x \varphi

**Структура**

Семантична структура наричаме нареденото множество  
\mathcal{A}= \{A,I\}, A \neq \varnothing  
Бележим |\mathcal{A}| = Aтова е универсумът на структурата, тоест обектите за който се говори в структурата, A \neq \varnothing  
I- интерпретация на обектите от универсумът.  
I(c) = c^{\mathcal{A}} \in A, където c- синтактичен обект, някакъв знак от A  
I(f) = f^{\mathcal{A}}:|\mathcal{A}|^n\rightarrow |\mathcal{A}|- n- местна функция съпоставя на nелемента от |\mathcal{A}|един елемент от |\mathcal{A}|  
I(p) = p^{\mathcal{A}} \subset A^n

**Оценка**

\upsilon : Var \rightarrow A

**Стойност на терм**

|| \tau ||^{\mathcal{A}}[\upsilon]- така бележим стойността на терма в структура \mathcal{A}при оценка \upsilon  
|| x ||^{\mathcal{A}}[\upsilon] = \upsilon(x)  
|| c ||^{\mathcal{A}}[\upsilon] = c^{\mathcal{A}}  
|| f(\tau_1,..,\tau_n) ||^{\mathcal{A}}[\upsilon] = f^{\mathcal{A}}(|| \tau_1 ||^{\mathcal{A}},..,|| \tau_n||^{\mathcal{A}})

**Стойност на формула**

|| \tau_1 \doteq \tau_2 ||^{\mathcal{A}}[\upsilon] = || \tau_2 ||^{\mathcal{A}}[\upsilon] = || \tau_2 ||^{\mathcal{A}}[\upsilon]  
|| p(\tau_1,...,\tau_n) ||^{\mathcal{A}}[\upsilon] = ture \iff \langle || \tau_1 ||^{\mathcal{A}},..,|| \tau_n||^{\mathcal{A}} \rangle \in p^{\mathcal{A}}  
|| \exists x \varphi ||^{\mathcal{A}}[\upsilon] \leftrightarrowсъществува a \in A: ||\varphi||^{\mathcal{A}}[\upsilon_a^x] = true  
|| \forall x \varphi ||^{\mathcal{A}}[\upsilon] \leftrightarrowза всяко a \in A: ||\varphi||^{\mathcal{A}}[\upsilon_a^x] = true

**Дефиниция (локално следване)**

Нека \Sigma, \Gammaса множества от предикатни формули. Ще казваме, че от \Sigmaлокално следва \Gamma, ако

(1)

\forall \mathcal{A} \forall v (\mathcal{A} \underset{v}\models \Sigma \rightarrow \mathcal{A} \underset{v}\models \Gamma)

Записваме \Sigma \overset{l}\models \Gamma.

**Дефиниция (глобално следване)**

Нека \Sigma, \Gammaса множества от предикатни формули. Ще казваме, че от \Sigmaглобално следва \Gamma, ако

(2)

\forall \mathcal{A} (\mathcal{A} \models \Sigma \rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma)

което записано малко по-подробно (разписана дефиницията за "от структура следва множество формули"):

(3)

\forall \mathcal{A} (\forall v (\mathcal{A} \underset{v}\models \Sigma) \rightarrow \forall v(\mathcal{A} \underset{v}\models \Gamma)

Записваме \Sigma \overset{g}\models \Gamma.

**Забележка**: Ако още не може да хванете тънката разлика: Локалното следване е по-силно: то казва че ако за дадена структура и оценка първото е вярно, то е вярно и второто. Глобалното следване казва, че ако в една структура е вярно първото (т.е за *всички* оценки е вярно), то в тази структура е вярно и второто (т.е за всички оценки е вярно и второто). Лесно се показва, че от локално следване следва глобално следване: ако си вземем една структура, и за всяка оценка е вярно първото, то от локалното следване следва, че за всяка оценка е вярно и второто. Следователно второто е вярно в структурата.