



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА I

23 юни 2013 г.

ТЕМА №1.

Задача 1. Да се реши уравнението:

$$\frac{2}{3+x} + \frac{3}{2+x} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2}.$$

Задача 2. В окръжност k е вписан трапец $ABCD$ с основи $AB = 8$ и $CD = 2$. Да се намерят дължините на бедрата (AD и BC) и лицето S на трапеца при условие, че в него може да се впише окръжност.

Задача 3. Да се намери реалното число x при условие, че числата $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$ и $\lg(2^x + 3)$ в този ред образуват аритметична прогресия.

Задача 4. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 1$ и $BC = \sqrt{2}$. Окръжност k с център O_1 , лежащ върху правата AB минава през върховете A и C . Да се намерят дължината на радиуса R на окръжността и $\sin \angle AO_1C$.

Задача 5. Реалните числа x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 - ax - 5a = 0$, където $a \in \mathbb{R}$. Да се намери a при условие, че числата $y_1 = x_1^2 + x_1x_2$ и $y_2 = x_2^2 + x_1x_2$ са корени на уравнението $y^2 - 9y - 135 = 0$.

Задача 6. С помощта на цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 са съставени всички възможни петцифрени числа (без повторение на цифри). Тези числа са подредени по големина и са записани последователно едно до друго от най-малкото към най-голямото 1234512354...54321. Да се намери броят на всички записани цифри и да се определи коя цифра стои на 237 място.

Задача 7. За остроъгълния триъгълник ABC имаме $AC_1 : C_1B = 4 : 1$, $CH = 5$ и $HC_1 = 4$, където CC_1 е височината към страната AB , а H е ортоцентърът на триъгълника. Да се намерят дължините на страните (AB , BC и CA) и лицето S на триъгълника ABC .

Задача 8. За правоъгълен триъгълник ABC с ъгли α , β и $\gamma = \frac{\pi}{2}$ е в сила равенството

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2}.$$

Да се намерят големините на ъглите α и β . Отговорът да се обоснове!

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- номерирайте всички страници на беловата си;
- означавайте ясно началото и края на решението на всяка отделна задача;
- решението на всяка задача трябва да започва на нова страница;
- не смесвайте белова и чернова;
- черновата не се проверява и не се оценява.

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!