

Софийски Университет “Св. Климент Охридски”
Писмен конкурсен изпит по математика, 23 юли 2009г.

ТЕМА 3

Задача 1. Да се реши уравнението

$$\log_2(x + 14) + 2\log_4(x + 2) = 6.$$

Задача 2. Да се намерят дължините на катетите AC и BC в правоъгълен триъгълник ABC , ако радиусите на описаната и на вписаната за триъгълника окръжности са съответно $R = \frac{17}{2}$ и $r = 3$.

Задача 3. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ е геометрична прогресия, за която $a_1 + a_3 = 20$, $a_2 + a_4 = 40$ и $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1020$. Да се намери n .

Задача 4. Нека $ABCD$ е правоъгълен трапец с прави ъгли при върховете A и D , като $AB > CD$. Пресечните точки на диагоналите AC и BD със средната отсечка на трапеца я разделят на три равни части. Да се намери лицето на трапеца, ако в него може да се впише окръжност с радиус $r = 4$.

Задача 5. Нека $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, и $\cos^2 \alpha - 8 \sin \alpha \cos \alpha + 3 = 0$. Да се намери стойността на $\cos 2\alpha$.

Задача 6. Да се реши неравенството

$$2^{|x|} + 2^{4-|x|} < 10.$$

Задача 7. В триъгълника ABC медианата CM ($M \in AB$) и ъглополовящата AL ($L \in BC$) са взаимно перпендикулярни, като $CM = 2\sqrt{5}$ и $AL = \frac{8}{3}$. Да се намерят дължините на страните на $\triangle ABC$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , $a \geq 0$, за които най-малката стойност на функцията $f(x) = |x^2 - 3x + 2| + (a + 1)x$ е равна на 1.

Задача 9. Нека AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) са височини в остроъгълния триъгълник ABC , точката M е среда на AB , и $AB = 12$. Нека K е пресечната точка на AA_1 и MB_1 , а L е пресечната точка на BB_1 и MA_1 . Да се намери лицето на триъгълника KLM , ако $MK : KB_1 = 1 : 2$ и $ML : LA_1 = 5 : 1$.

Задача 10. Нека $f(x) = x^2 + bx + c$, и уравнението $f(x) = 0$ има два различни реални корена. Да се докаже, че множеството от решенията на неравенството

$$\frac{f'(x)}{f(x)} > 1$$

е обединение на два непресичащи се интервала, и да се намери сумата на дължините им.

Време за работа - 5 часа

Драги кандидат-студенти,

- *номерируйте всички страници на беловата си;*
- *решението на всяка задача трябва да започва на нова страница;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!