

**Софийски Университет “Св. Климент Охридски”**  
**Писмен конкурс изпит по математика, 23 юли 2009г.**

**ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ - ТЕМА 3**

**Задача 1.** Да се реши уравнението

$$\log_2(x+14) + 2\log_4(x+2) = 6.$$

*Решение.* Уравнението има смисъл при  $x > -2$ . След като преминем към логаритми при основа 2 получаваме  $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = \log_2 64 \Rightarrow (x+14)(x+2) = 64 \Rightarrow x^2 + 16x - 36 = 0$ . Оттук намираме, че първоначалното уравнение има единствен корен  $x = 2$ .

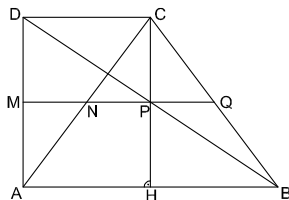
**Задача 2.** Да се намерят дължините на катетите  $AC$  и  $BC$  в правоъгълен триъгълник  $ABC$ , ако радиусите на описаната и на вписаната за триъгълника окръжности са съответно  $R = \frac{17}{2}$  и  $r = 3$ .

*Решение.* При обичайните означения за елементите на  $\triangle ABC$ , имаме  $c = 2R = 17$  и  $\frac{a+b-c}{2} = r = 3$ , откъдето  $a + b = 23$ . От тук и от  $a^2 + b^2 = c^2 = 289$  намираме  $a = 15$ ,  $b = 8$  или  $a = 8$ ,  $b = 15$ .

**Задача 3.** Нека  $a_1, a_2, \dots, a_n$  е геометрична прогресия, за която  $a_1 + a_3 = 20$ ,  $a_2 + a_4 = 40$  и  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1020$ . Да се намери  $n$ .

*Решение.* Нека  $q$  е частното на прогресията. От  $a_1 + a_3 = a_1(1 + q^2) = 20$  и  $a_2 + a_4 = a_1q(1 + q^2) = 40$  намираме  $q = 2$  и  $a_1 = 4$ . От равенството  $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 4(2^n - 1) = 1020$  получаваме  $2^n = 256 = 2^8$ , следователно  $n = 8$ .

**Задача 4.** Нека  $ABCD$  е правоъгълен трапец с прави ъгли при върховете  $A$  и  $D$ , като  $AB > CD$ . Пресечните точки на диагоналите  $AC$  и  $BD$  със средната отсечка на трапеца я разделят на три равни части. Да се намери лицето на трапеца, ако в него може да се впише окръжност с радиус  $r = 4$ .



*Решение.* Тъй като в правоъгълния трапец  $ABCD$  може да се впише окръжност, то височината на трапеца е равна на диаметъра на тази окръжност, т.е.  $AD = 2r = 8$ , и  $AD + BC = AB + CD$ , т.е.  $BC = AB + CD - 8$ . Нека  $M$  и  $Q$  са средите съответно на  $AD$  и  $BC$ , а  $N$  и  $P$  са пресечните точки на  $MQ$  с диагоналите  $AC$  и  $BD$ . Означаваме  $x = MN$ . По условие  $MP = 2x$  и  $MQ = 3x$ . Тъй като  $MN$  и  $MP$  са средни отсечки съответно в  $\triangle ACD$  и  $\triangle ABD$ , то  $CD = 2x$  и  $AB = 4x$ . Нека  $CH \perp AB$  ( $H \in AB$ ). Тогава  $BH = 2x$ , и от Питагоровата теорема за  $\triangle BCH$  имаме  $4x^2 + 64 = (6x - 8)^2$ , откъдето намираме  $x = 3$ . За лицето  $S$  на трапеца получаваме  $S = MQ \cdot AD = 24x = 72$ .

**Задача 5.** Нека  $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ , и  $\cos^2 \alpha - 8 \sin \alpha \cos \alpha + 3 = 0$ . Да се намери стойността на  $\cos 2\alpha$ .

*Решение.* Заместваме  $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$  и  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ , и получаваме  $\cos 2\alpha - 8 \sin 2\alpha + 7 = 0$ , или  $\cos 2\alpha + 7 = 8 \sin 2\alpha$ . При указания интервал за  $\alpha$  двете страни са положителни, и след повдигане на квадрат получаваме еквивалентното квадратно уравнение  $65 \cos^2 2\alpha + 14 \cos 2\alpha - 15 = 0$ . Неговите корени са  $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$  и  $\cos 2\alpha = \frac{5}{13}$ . Понеже  $\cos 2\alpha < 0$  при  $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ , търсената стойност е  $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ .

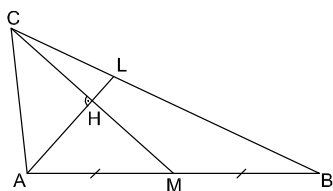
**Задача 6.** Да се реши неравенството

$$2^{|x|} + 2^{4-|x|} < 10.$$

*Решение.* Полагаме  $y = 2^{|x|}$ ,  $y > 0$ , и получаваме неравенството  $\frac{y^2 - 10y + 16}{y} < 0$ , което предвид  $y > 0$  е равносилно на квадратното неравенство  $y^2 - 10y + 16 < 0$  с решения  $y \in (2, 8)$ . От  $2 < 2^{|x|} < 8$  следва, че  $1 < |x| < 3$ , и от там намираме  $x \in (-3, -1) \cup (1, 3)$ .

**Задача 7.** В триъгълника  $ABC$  медианата  $CM$  ( $M \in AB$ ) и ъглополовящата  $AL$  ( $L \in BC$ ) са взаимно перпендикулярни, като  $CM = 2\sqrt{5}$  и  $AL = \frac{8}{3}$ . Да се намерят дължините на страните на  $\triangle ABC$ .

*Решение.* Нека  $H$  е пресечната точка на  $CM$  и ъглополовящата  $AL$  на  $\angle CAB$ . Правоъгълните триъгълници  $AHM$  и  $AHC$  са еднакви, откъдето следва, че  $AC = AM$ , т.е.  $c = 2b$ .



От свойството на ъглополовящата имаме  $BL = \frac{2}{3}a$ ,  $CL = \frac{1}{3}a$ . От формулите за медианата  $CM$  и ъглополовящата  $AL$  получаваме

$$CM^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) = \frac{a^2 - b^2}{2} = 20, \quad AL^2 = b \cdot c - BL \cdot CL = \frac{2}{9}(9b^2 - a^2) = \frac{64}{9}.$$

От системата уравнения  $a^2 - b^2 = 40$  и  $9b^2 - a^2 = 32$  намираме  $b = 3$ ,  $a = 7$ , и тогава  $c = 2b = 6$ .

**Задача 8.** Да се намерят стойностите на реалния параметър  $a$ ,  $a \geq 0$ , за които най-малката стойност на функцията  $f(x) = |x^2 - 3x + 2| + (a + 1)x$  е равна на 1.

*Решение.* При  $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$  имаме  $f(x) = x^2 + (a - 2)x + 2$ . Тази квадратна функция приема най-малка стойност при  $x = x_0 := \frac{2-a}{2}$ . Понеже  $x_0 \leq 1$ , най-малката стойност на  $f$  в  $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$  е  $f(x_0) = 2 - \frac{(2-a)^2}{4}$ .

При  $x \in [1, 2]$  имаме  $f(x) = -x^2 + (a + 4)x - 2$ . Тази квадратна функция расте в  $(-\infty, \frac{a+4}{2})$ , и намалява в  $(\frac{a+4}{2}, \infty)$ . Понеже  $\frac{a+4}{2} \geq 2$ ,  $f(x)$  расте в интервала  $[1, 2]$ , следователно най-малката ѝ стойност в този интервал е  $f(1) = a + 1$ . Следователно най-малката стойност на  $f(x)$  в  $(-\infty, \infty)$  е  $M = \min\{2 - \frac{(2-a)^2}{4}, a + 1\}$ . Понеже  $2 - \frac{(2-a)^2}{4} = a + 1 - a^2/4 \leq a + 1$ , имаме  $M = 2 - \frac{(2-a)^2}{4}$ , и  $M = 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{(2-a)^2}{4} = 1$ , т.е.  $(2-a)^2 = 4$ . От тук търсените стойности на  $a$  са  $a = 0$  и  $a = 4$ .

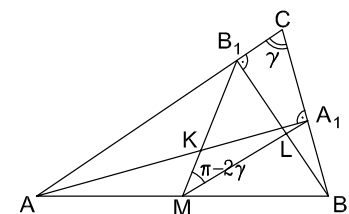
**Задача 9.** Нека  $AA_1$  ( $A_1 \in BC$ ) и  $BB_1$  ( $B_1 \in AC$ ) са височини в остроъгълния триъгълник  $ABC$ , точката  $M$  е среда на  $AB$ , и  $AB = 12$ . Нека  $K$  е пресечната точка на  $AA_1$  и  $MB_1$ , а  $L$  е пресечната точка на  $BB_1$  и  $MA_1$ . Да се намери лицето на триъгълника  $KLM$ , ако  $MK : KB_1 = 1 : 2$  и  $ML : LA_1 = 5 : 1$ .

*Решение.* Имам  $MA_1 = MB_1 = AB/2 = 6$ , и  $MK = \frac{1}{3}MB_1 = 2$ ,  $ML = \frac{5}{6}MA_1 = 5$ . От равнобедрените  $\triangle AMB_1$  и  $\triangle BMA_1$  изразяваме  $\angle AMB_1 = \pi - 2\alpha$ ,  $\angle BMA_1 = \pi - 2\beta$ , откъдето  $\angle KML = \pi - 2\gamma$ . Тогава  $S_{KLM} = \frac{1}{2}MK \cdot ML \sin 2\gamma = 5 \sin 2\gamma$ . От отношенията  $S_{AKB_1} : S_{AMK} = KB_1 : MK = 2 : 1$  и равенствата  $S_{AKB_1} = \frac{1}{2}AB_1 \cdot AK \cdot \sin(\pi/2 - \gamma)$ ,  $S_{AMK} = \frac{1}{2}AM \cdot AK \cdot \sin(\pi/2 - \beta)$  получаваме

$$2 = \frac{S_{AKB_1}}{S_{AMK}} = \frac{AB_1 \cdot AK \cdot \cos \gamma}{AM \cdot AK \cdot \cos \beta} = \frac{c \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\frac{c}{2} \cdot \cos \beta} = \frac{2 \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\cos \beta}.$$

Аналогично получаваме

$$\frac{1}{5} = \frac{S_{BA_1L}}{S_{BML}} = \frac{BA_1 \cdot BL \cdot \cos \gamma}{BM \cdot BL \cdot \cos \alpha} = \frac{c \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\frac{c}{2} \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\cos \alpha}.$$



От тук намираме  $\cos^2 \gamma = \frac{1}{10}$ , а от там  $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{10}}$  (триъгълникът  $ABC$  е остроъгълен),  $\sin \gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ,  $\sin 2\gamma = \frac{3}{5}$ . Следователно,  $S_{KLM} = 5 \sin 2\gamma = 3$ .

**Задача 10.** Нека  $f(x) = x^2 + bx + c$ , и уравнението  $f(x) = 0$  има два различни реални корена. Да се докаже, че множеството от решенията на неравенството

$$\frac{f'(x)}{f(x)} > 1$$

е обединение на два непресичащи се интервала, и да се намери сумата на дължините им.

*Решение.* Нека  $x_1 < x_2$  са корените на  $f(x) = 0$ . Неравенството  $\frac{f'(x)}{f(x)} > 1$  има смисъл при  $x \neq x_1, x_2$ , и е равносилно на  $f(x)(f(x) - f'(x)) < 0$ . Имам  $f'(x) = 2x + b$ , и  $-b = x_1 + x_2$ . Нека  $g(x) = f(x) - f'(x) = x^2 + (b - 2)x + c - b$ . От  $g(x_2) = -f'(x_2) = -2x_2 - b = -2x_2 + x_1 + x_2 = x_1 - x_2 < 0$  и  $g(x_1) = -f'(x_1) = -2x_1 - b = x_2 - x_1 > 0$  заключаваме, че квадратният тричлен  $g(x)$  има два различни реални корена  $y_1 < y_2$ , и  $x_1 < y_1 < x_2 < y_2$ . Така получаваме, че неравенството е равносилно на  $(x - x_1)(x - y_1)(x - x_2)(x - y_2) < 0$ , и то е изпълнено точно когато  $x$  принадлежи на обединението на двата непресичащи се интервала  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . Сумата  $\ell$  от дължините им е  $\ell = y_1 - x_1 + y_2 - x_2 = y_1 + y_2 - (x_1 + x_2)$ . От формулите на Виет  $y_1 + y_2 = 2 - b$  и  $x_1 + x_2 = -b$  намираме  $\ell = 2$ .

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата  $2 + 0,1 \cdot N$ , където  $N$  е броят на получените точки.