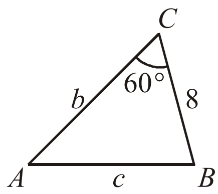
СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
8 АПРИЛ 2012 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 1

1. Да се реши уравнението $\sqrt{x^2+x-4}=2x-4.$
Решение. Решенията на уравнението удовлетворяват неравенството $2x-4\ge 0,\ x\ge 2.$ При $x\ge 2$ имаме $\sqrt{x^2+x-4}=2x-4 \Leftrightarrow x^2+x-4=(2x-4)^2 \Leftrightarrow 3x^2-17x+20=0.$ Корените на това уравнение са $x_1=4$ и $x_2=\frac{5}{3}.$ Понеже $4>2,$ а $\frac{5}{3}<2,$ то решение на ирационалното уравнение е $x=4.$ Намирането на решението може да се извърши и с проверка.

2. В триъгълника ABC дължината на страната BC е 8 и $\sphericalangle ACB=60°.$ Да се намерят другите две страни, ако радиусът описаната окръжност е $R=\frac{13\sqrt{3}}{3}.$



Решение. От синусова теорема намираме $c=2R\sin 60°=13.$
От косинусова теорема: $13^2=8^2+b^2-8b,$ откъдето $b^2-8b-105=0.$
Корените са $b_1=15$ и $b_2=-7.$ Понеже $b>0,$ решението е $b=15.$

3 Да се реши неравенството $\frac{2x+1}{4x-x^2-3}\le 2x+1.$

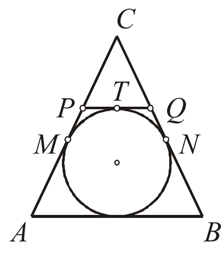
Решение. Дефиниционното множество е $x\ne 1, x\ne 3.$ Имаме $\frac{2x+1}{4x-x^2-3}\le 2x+1$

$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)\left(1-\left(4x-x^2-3\right)\right)}{4x-x^2-3}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-2)^2}{(x-1)(3-x)}\le 0.$ Решението на неравенството е

$x\in\left[-\frac{1}{2};1\right)\cup\{2\}\cup(3;+\infty).$

4. Даден е равнобедрен триъгълник ABC с периметър 32. Допирателната към вписаната окръжност, успоредна на основата AB, пресича бедрата в точки P и Q. Да се намери лицето на триъгълника, ако $PQ=4.$

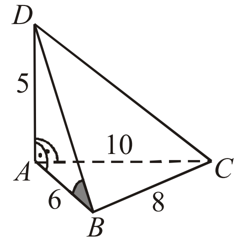
Решение. Първи начин Нека $AB=a$ и $AC=BC=b.$ От $\triangle PQC\sim\triangle ABC$ имаме $\frac{PQ}{AB}=\frac{CQ}{CB},$ откъдето $\frac{4}{a}=\frac{CQ}{b}.$ Но $PT=TQ=2,$



$QN=TQ=2$ и $BN=\frac{a}{2}.$ Така $\frac{4}{a}+\frac{2}{b}=\frac{CQ}{b}+\frac{2}{b}=\frac{CN}{b}=\frac{b-\frac{a}{2}}{b}.$ Откъдето $\frac{4b+2a}{a}=\frac{2b-a}{2},$ $\frac{2.32}{a}=\frac{32-2a}{2},$ $(a-8)^2=0$ и $a=8.$ Така намираме $b=12,$ $h=8\sqrt{2}$ и $S=32\sqrt{2}.$

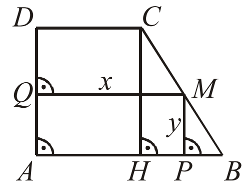
Втори начин. Нека $AB=a,$ $AC=BC=b,$ $P_{ABC}=2p=32$ и $P_{PQC}=2q.$ От $\triangle PQC\sim\triangle ABC$ имаме $\frac{PQ}{AB}=\frac{2q}{2p}.$ Но $PT=PM,$ $TQ=QN$ и $2q=2CN=2(p-a).$ Така $\frac{4}{a}=\frac{p-a}{p},$ откъдето $(a-8)^2=0$ и $a=8.$ Така намираме $b=12,$ $h=8\sqrt{2}$ и $S=32\sqrt{2}.$

5. Основата ABC на триъгълна пирамида $ABCD$ има страни $AB = 6,\ BC = 8$ и $AC = 10$. Околният ръб AD е перпендикулярен на равнината на основата и има дължина 5. Да се намери тангенсът на ъгъла, който сключват основата и околната стена BCD.

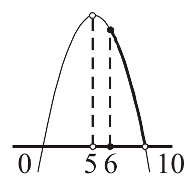


Решение. В $\triangle ABC$ $AB^2 + BC^2 = 36 + 64 = 100 = AC^2$, откъдето $\sphericalangle ABC = 90°$. От $AB = \text{пр}_{ABC} DB$ и $AB \perp BC$ следва, че $DB \perp BC$. Следователно равнината $ABC \perp BC$, и $\sphericalangle ABD = \varphi$ е линейният на двустенния ъгъл, който сключват основата и околната стена BCD. От $\triangle ABD$ намираме $\sphericalangle ABD = \operatorname{tg} \varphi = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{6}$.

6. В трапеца $ABCD$ $\left(AB \parallel CD\right)$ $AB = 10,\ CD = 6,\ AD = 8$ и $\sphericalangle BAD = 90°$. Точка M лежи на бедрото BC, а P и Q са ортогоналните ѝ проекции съответно върху AB и AD. Да се намери най-голямата стойност на лицето на четириъгълника $APMQ$.



Решение. Очевидно четириъгълникът $APMQ$ е правоъгълник. Ако $MQ = x$ и $MP = y$, то $S = S_{APMQ} = xy$. Нека $CH \perp AB$. Тогава $HB = AB - AP = 10 - x$. От $\triangle MPB \sim \triangle CHB$ имаме $\frac{MP}{CH} = \frac{PB}{BH} \Rightarrow$ $\frac{y}{8} = \frac{10-x}{10-6}$, откъдето $y = 2\left(10 - x\right)$. Така за лицето получаваме $S\left(x\right) = 2x\left(10 - x\right)$. Понеже $CD \le MQ < AB$, $x \in \left[6;10\right)$. Квадратната функция $y = 2x\left(10 - x\right)$ достига най-голяма стойност при $x_0 = 5$. Функцията $S\left(x\right) = 2x\left(10 - x\right)$ е дефинирана в $\left[6;10\right)$ и $x_0 \notin \left[6;10\right)$. Тогава $S_{\max} = S\left(6\right) = 48$, понеже функцията е монотонно намаляваща в интервала $\left[6;10\right)$.



7. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $\left(a-1\right)4^x + \left(2a-3\right)6^x = \left(3a-4\right)9^x$ има едно решение.

Решение. Понеже $4^x \ne 0$, имаме $\left(a-1\right)4^x + \left(2a-3\right)6^x = \left(3a-4\right)9^x$

$\Leftrightarrow \left(3a-4\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(2a-3\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - \left(a-1\right) = 0$. Като положим $u = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$, трябва да намерим тези a, за които уравнението $\left(3a-4\right)u^2 - \left(2a-3\right)u - \left(a-1\right) = 0$ има един положителен корен. Лесно се проверява, че при $a = \frac{4}{3}$ уравнението има един корен $u = 1$. При $a \ne \frac{4}{3}$ корените на уравнението са $u_1 = 1$ и $u_2 = \frac{1-a}{3a-4}$. Понеже $u_1 > 0$, трябва $\frac{1-a}{3a-4} \le 0$, откъде-то $a \in \left(-\infty;1\right] \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right)$. Ако $\frac{1-a}{3a-4} = 1$, уравнението има един двоен корен. Така получаваме $a = \frac{5}{4}$. Окончателно $a \in \left(-\infty;1\right] \cup \left\{\frac{5}{4}\right\} \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right)$.

8. Нека $f(x) = x^2 + ax + b$, където a и b са реални параметри. Целите числа m и n $\left(m \ne n\right)$ са такива, че $f(m) = f(n) = 1$. Да се намери $\left|m - n\right|$, ако съществува цяло число p, за което $f(p) = -1$.

Решение. От $f(m) = f(n) = 1$ получаваме $m^2 + am + b = 1$ и $n^2 + an + b = 1$. Като ги извадим почленно намираме $(m-n)(m+n+a) = 0$, откъдето $a = -(m+n)$ и $b = mn+1$. Така $f(x) = x^2 - (m+n)x + mn + 1$ и $f(x) - 1 = x^2 - (m+n)x + mn = (x-m)(x-n)$. Понеже $f(p) = -1$, $(p-m)(p-n) = -2$. Тъй като *m*, *n* и *p* са цели получаваме следните възможности:

1) $p-m=1$, $p-n=-2$ и $n-m=3$; 2) $p-m=-1$, $p-n=2$ и $m-n=3$;
3) $p-m=-2$, $p-n=1$ и $m-n=3$; 4) $p-m=2$, $p-n=-1$ и $n-m=3$.

Следователно $|m-n| = 3$.