Софийски Университет „Св. Климент Охридски“

Писмен конкурсен изпит по математика
10 април 2011 година

Тема №2

Примерни решения

Задача 1. Да се реши уравнението $x\,|x-8| = -7$.

Решение. Понеже $|x-8| \geq 0$ и $-7 < 0$, уравнението няма положителни корени. За $x \leq 0$ имаме $x - 8 < 0$ и уравнението е: $x\,(8-x) = -7$, с корени $4 \pm \sqrt{23}$, от които само $4 - \sqrt{23}$ е отрицателен. Отговор: $4 - \sqrt{23}$.

II-ро решение. При $x < 8$ уравнението е: $x\,(8-x) = -7$, с корени $4 \pm \sqrt{23}$, от които само $4 - \sqrt{23}$ е по-малък от 8. При $x \geq 8$ уравнението е: $x\,(x-8) = -7$, с корени 1 и 7. И двата корена не отговарят на разглеждания случай.

Задача 2. Три числа, със сума 18, са последователни членове на намаляваща аритметична прогресия. Ако добавим 5 към първото число, 6 към второто и 9 към третото, ще получим последователни членове на геометрична прогресия.

Да се намерят числата.

Решение. Нека a, b, и c са търсените числа. Тогава $a \geq b \geq c$, $a+b+c = 18$ и, от условието за аритметична прогресия, $a + c = 2b$, откъдето $b = 6$. Полагаме $t = a - 6 = 6 - c \geq 0$. Числата $t+11$, 12 и $15-t$ образуват геометрична прогресия, т.е. $(t+11)\,(15-t) = 144$, откъдето $t^2 - 4t - 21 = 0$. Неотрицателният корен на това уравнение е 7. Отговор: $13,\ 6,\ -1$. (алтернативното полагане $u = 6 - a = c - 6 \leq 0$ води до уравнението $u^2 + 4u - 21 = 0$)

II-ро решение. Нека x, y, и z са търсените числа. Тогава те удовлетворяват равенствата

$$x + y + z = 18\,;\ x + z = 2y\,;\ (x+5)\,(z+9) = (y+6)^2$$

и неравенствата $x \geq y \geq z$. От първите две уравнения намираме $y = 6$ и достигаме до системата $x + z = 12\,;\ (x+5)\,(z+9) = 144$, която, след заместване $z = 12 - x$, се свежда до $(x+5)\,(21-x) = 144$, с корени 3 и 13. $x = 3 < 6$ не е решение на задачата.

Задача 3. Да се реши неравенството:

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}} + \sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}} \geq 0 \quad .$$

Решение. Извършваме последователно еквивалетни преобразувания:

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}} + \sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}} \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}} \geq -\sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}}\right)^3 \geq \left(-\sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{x+1}{x-5} \geq -\frac{x+5}{x-1} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x+1}{x-5} + \frac{x+5}{x-1} \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2\left(x+\sqrt{13}\right)\left(x-\sqrt{13}\right)}{(x-5)\,(x-1)} \geq 0$$

Решенията на последното неравенство са $\left(-\infty,\ -\sqrt{13}\right] \cup \left(1,\ \sqrt{13}\right] \cup (5,\ +\infty)$.

II-ро решение. Допустимите стойности са: $x \neq 1,\ 5$. Решаваме уравнението:

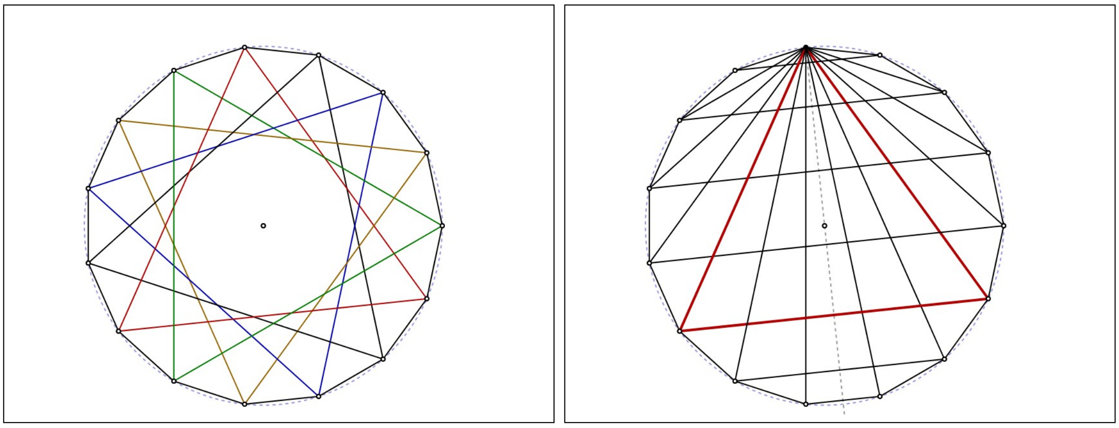
$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}} + \sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}} = -\sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}}\right)^3 = \left(-\sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{x+1}{x-5} = -\frac{x+5}{x-1} \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - 1 = -\left(x^2 - 25\right) \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = 13 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm\sqrt{13}$$

Корените разделят множеството на допустимите стойности на интервалите $\left(-\infty,\ -\sqrt{13}\right)$, $\left(-\sqrt{13},\ 1\right)$, $\left(1,\ \sqrt{13}\right)$, $\left(\sqrt{13},\ 5\right)$ и $(5,\ +\infty)$. Първият, третият и петият се състоят от решения на неравенството, а във втория и четвъртия няма решения, защото числата -6, $1,001$ и 6 са решения, а 0 и $4,999$ не са решения. Окончателния отговор получаваме като добавим корените на уравнението.

Задача 4. Да се намери броят на равнобедрените триъгълници, чиито върхове са върхове на даден правилен петнадесетоъгълник.

Решение. Равностранните триъгълници са 5. Преброяваме равнобедрените триъгълници, които не са равностранни, с фиксиран връх срещу основата. Останалите два върха са симетрични спрямо диаметъра през фиксираната точка. Има 7 такива двойки, като от една от тях се получава равностранен триъгълник. Понеже върховете са 15, то търсеният брой е $15.6 + 5 = 95$.

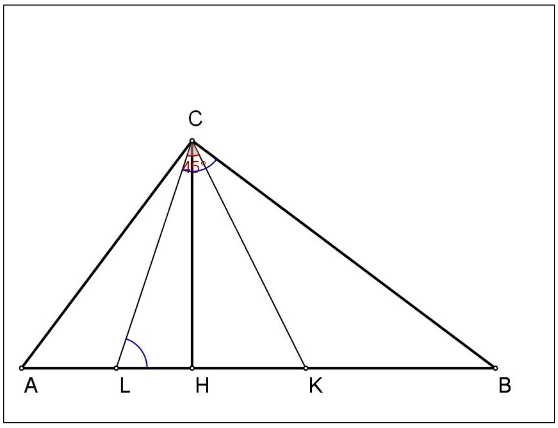


II-ро решение. Равнобедрените триъгълници с фиксиран връх срещу основата са 7, т.е. получаваме $15.7 = 105$ триъгълника. При този начин на броене всеки равностранен триъгълник е броен три пъти (всеки връх е връх срещу основата). Търсеният брой е $105 - 2.5 = 95$.

III-то решение. За всяка двойка върхове съществува точно един, така че трите точки (началната двойка — върхове при основата и съществуващата трета) образуват равнобедрен триъгълник. Възможните двойки са $\dfrac{15.14}{2} = 105$. При този начин на броене всеки равностранен триъгълник е броен три пъти (всяка страна е „основа“). Търсеният брой е $105 - 2.5 = 95$.

Задача 5. В правоъгълния $\triangle ABC$, с катети $AC = 8$ и $BC = 15$, CH ($H \in AB$) е височината към хипотенузата, CL ($L \in AB$) е ъглополовящата на $\sphericalangle ACH$, а CK ($K \in AB$) — на $\sphericalangle BCH$. Да се намери радиусът на описаната около $\triangle LKC$ окръжност.

Решение. Имаме $\sphericalangle LCK = \sphericalangle LCH + \sphericalangle HCK = \frac{1}{2}\sphericalangle ACH + \frac{1}{2}\sphericalangle HCB = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 45^\circ$. Триъгълниците LCB и KCA са равнобедрени. Наистина, $\sphericalangle BLC = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACL$ като външен, а $\sphericalangle LCB = \sphericalangle LCH + \sphericalangle HCB$. Понеже $\sphericalangle BAC = \sphericalangle HCB$ и $\sphericalangle ACL = \sphericalangle LCH$, то $\sphericalangle BLC = \sphericalangle LCB$. Аналогично, $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCK = \sphericalangle ACH + \sphericalangle HCK = \sphericalangle ACK$. Следователно, $BL = BC$ и $AK = AC$, откъдето $AB + LK = AK + BL = AC + BC$. Понеже $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 17$, то $LK = AB + BC - AB = 6$. За търсения радиус имаме $R = \dfrac{LK}{2\sin\sphericalangle LCK} = 3\sqrt{2}$.



Алтернативно пресмятане на LK. Имаме $AB = 17$, $AH = \dfrac{AC^2}{AB} = \dfrac{64}{17}$, $BH = \dfrac{BC^2}{AB} = \dfrac{225}{17}$, $CH = \dfrac{AC.BC}{AB} = \dfrac{120}{17}$.

CL е ъглополовяща, значи $AL : HL = AC : HC = 17 : 15$. Полагаме $AL = 17x$ и $LH = 15x$. Тогава $AH = 32x$, т.е. $x = \dfrac{2}{17}$ и $LH = \dfrac{30}{13}$. Аналогично, $BK : HK = BC : HC = 17 : 8 = 17y : 8y$, откъдето $y = \dfrac{9}{17}$, $KH = \dfrac{72}{17}$, $LK = LH + KH = 6$.

Задача 6. Да се реши уравнението $\log_6(2 - 5\cos x) - 1 = 2\log_6 \sin x$.

Решение. Решенията на уравнението трябда да удовлетворяват условията $2-5\cos x>0$ и $\sin x>0$. Преобразуваме уравнението

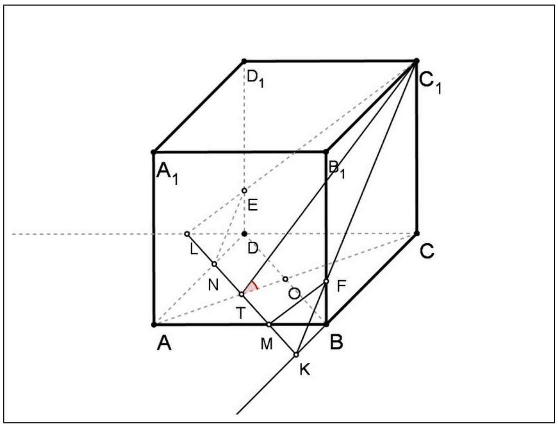
$$\log_6(2-5\cos x)-1=2\log_6\sin x \quad\Rightarrow\quad \log_6(2-5\cos x)=\log_6 6\sin^2 x \quad\Rightarrow\quad 2-5\cos x=6\sin^2 x$$

$$\iff\quad 6\cos^2 x-5\cos x-4=0 \quad\iff\quad (3\cos x-4)(2\cos x+1)=0 \quad\iff\quad \cos x=-\frac{1}{2}\quad ,$$

защото $3\cos x-4\le -1$. Корените на последното уравнение са $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ и всички те удовлетворяват условието $2-5\cos x>0$. Понеже $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)<0$ и $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)>0$, то решенията на изходното уравнение са $\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ (k — цяло число).

Задача 7. Точките M и N са съответно от ръбовете AB и AD на куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, като $AM=AN$. Да се намери отношението на обемите на телата, на които равнината, минаваща през M, N и върха C_1, разделя куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ако тангенсът на ъгъла между тази равнина и равнината $ABCD$ е равен на $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Решение. Нека $AB=a$. MN е пресечницата на равнините MNC_1 и $ABCD$. Понеже $AM=AN$, то $MN\parallel BD$, откъдето $MN\perp AC$. Нека $T=MN\times AC$.

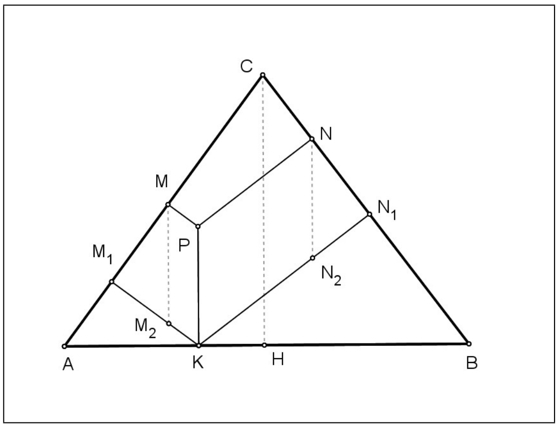


От $C_1C\perp ABCD$ и теоремата за трите перпендикуляра получаваме $C_1T\perp MN$, т.е. условието е $\operatorname{tg}\sphericalangle CTC_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. Следователно $CT=\dfrac{2\sqrt{2}\,a}{3}$ и ($O=BD\times AC$) $OT=\dfrac{\sqrt{2}\,a}{6}$, откъдето $OT:OA=1:3$ и $MB=\dfrac{a}{3}$. Означаваме $K=MN\times BC$, $L=MN\times CD$, $F=KC_1\times BB_1$, $E=LC_1\times DD_1$. Ще пресметнем обема V_1 на многостена с върхове M, B, C, N, E, F и C_1 като го допълним с пирамидите $MKFB$ и $LNED$ до пирамидата KC_1LC (и трите с взаимно перпендикулярни ръбове през един връх).

Имаме $LD=KB=BM=\dfrac{a}{3}$, $BF:CC_1=BK:CK=1:4$, т.е. $DE=BF=\dfrac{a}{4}$. За обемите намираме $V_{LNED}=V_{MKFB}=\dfrac{1}{6}.\dfrac{a}{3}.\dfrac{a}{3}.\dfrac{a}{4}=\dfrac{a^3}{216}$, $V_{KC_1LC}=\dfrac{1}{6}.\dfrac{4a}{3}.\dfrac{4a}{3}.a=\dfrac{8a^3}{27}$. Тогава $V_1=V_{KC_1LC}-V_{MKFB}-V_{LNED}=\dfrac{31a^3}{108}$, а за обема на многостена с върхове M, F, C_1, E, N, A, A_1, B_1 и D_1 имаме $V_2=a^3-V_1=\dfrac{77a^3}{108}$. Отговор: $V_1:V_2=31:77$.

Задача 8. Страните на $\triangle ABC$ са $AB=12$, $AC=BC=11$, точката P е вътрешна за триъгълника, а K, M и N са петите на перпендикулярите от P съответно към страните AB, AC и BC. Да се намери сумата $BN+CM$, ако $AK=5$.

Решение. Нека H е средата на AB. Тогава $CH\perp AB$ и $\sphericalangle ACH=\sphericalangle BCH$. Означаваме $\alpha=\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC$. Имаме $\cos\alpha=\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{6}{11}$.



I-во решение. Нека $KN_1\perp BC$ ($N_1\in BC$), $KM_1\perp AC$ ($N_1\in AC$), $NN_2\parallel CH$ ($N_2\in KN_1$) и $MM_2\parallel CH$ ($M_2\in KM_1$). Тогава $NN_2=PK=MM_2$ и триъгълниците NN_1N_2 и MM_1M_2 са еднакви, откъдето $NN_1=MM_1$. Следователно $BN+CM=BN_1+CM_1$. Имаме $BN_1=BK.\cos\alpha=\dfrac{42}{11}$,

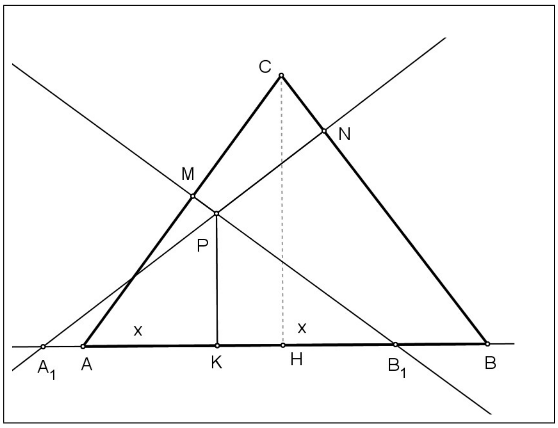
$CM_1=AC-AM_1=AC-AK.\cos\alpha=\dfrac{91}{11}$.

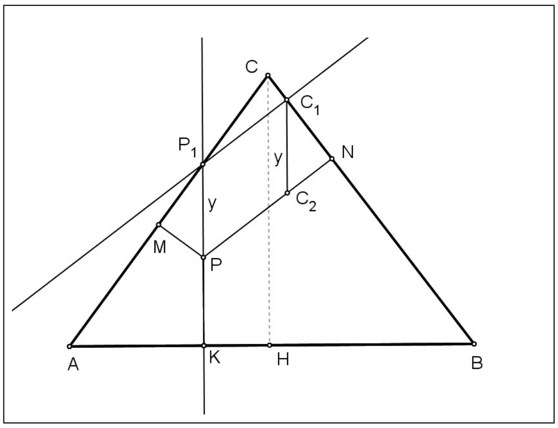
Отговор: $BN+CM=\dfrac{133}{11}$.

II-ро решение. Нека правата AB пресича правата PN в точката A_1, а правата PM — в точката B_1. Тогава $\sphericalangle NA_1B = \sphericalangle MB_1A$ и, следователно, $A_1K = KB_1 = x$. Имаме

$$BN + CM = BA_1.\cos\alpha + AC - AB_1.\cos\alpha = (BK + x)\cos\alpha + AC - (AK + x)\cos\alpha =$$

$$AC + (BK - AK)\cos\alpha = \frac{133}{11}\,.$$





III-то решение. Понеже $AK < AH$, правата KP пресича страната AC в точка P_1. Нека $P_1C_1 \perp BC$ $(C_1 \in BC)$ и $C_1C_2 \parallel CH$ $(C_2 \in PM)$. Тогава $P_1P = C_1C_2$ и триъгълниците PMP_1 и C_2NC_1 са еднакви, откъдето $MP_1 = NC_1$. Следователно $BN + CM = BC_1 + CP_1$. Имаме $AP_1 = \dfrac{AK}{\cos\alpha} = \dfrac{55}{6}$, $CP_1 = CA - AP_1 = \dfrac{11}{6}$, $CC_1 = CP_1.\cos(\pi - 2\alpha) = CP_1.\left(1 - 2\cos^2\alpha\right) = \dfrac{49}{66}$,

$$BN + CM = 11 - \frac{49}{66} + \frac{11}{6} = \frac{133}{11}\,.$$

Задача 9. Да се намери разликата между най-голямата и най-малката стойност на функцията:

$$4^{\sqrt{x(6-x)}} - a.2^{\sqrt{x(6-x)}+1}\quad .$$

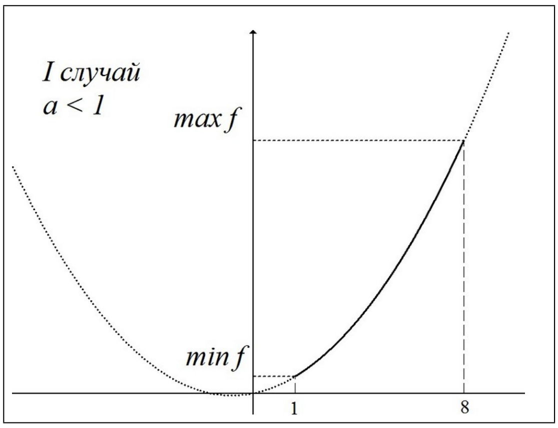
За коя стойност на параметъра a тази разлика е най-малка?

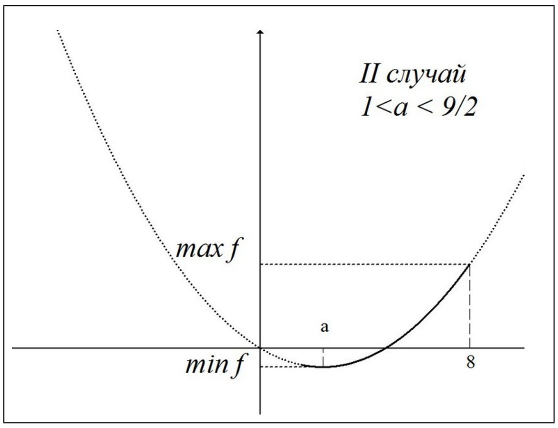
Решение. Полагаме $u = 2^{\sqrt{x(6-x)}}$. Имаме $x(6-x) \le 9$ и $x(6-x) \ge 0$ за $0 \le x \le 6$. За тези стойности на x е изпълнено $0 \le \sqrt{x(3-x)} \le 3$ и $1 \le u \le 8$.

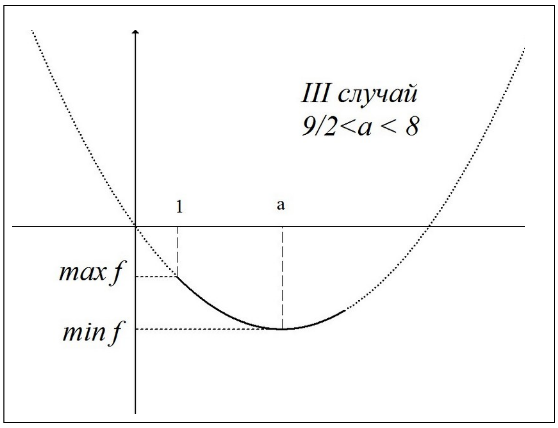
Задачата е да се намери разликата между най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(u) = u^2 - 2au$ в интервала $[1\,,\,8]$.

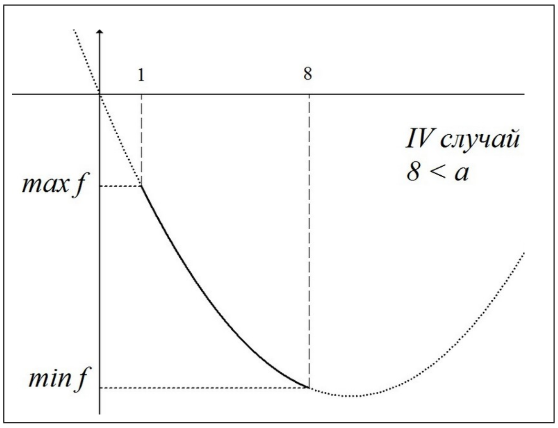
Най-голямата стойност на f се достига в онзи край на интервала $[1\,,\,8]$, който е по-далече от a. Най-малката стойност на f се достига в a, когато $a \in [1\,,\,8]$, и в по-близкия до a край, когато $a \notin [1\,,\,8]$. Следователно, за търсената разлика имаме:

$$R(a) = \begin{cases} 16(4-a) - (1-2a) = 7(9-2a) & \text{за} \quad a \le 1 \\ 16(4-a) - \left(-a^2\right) = (a-8)^2 & \text{за} \quad 1 \le a \le \dfrac{9}{2} \\ (1-2a) - \left(-a^2\right) = (a-1)^2 & \text{за} \quad \dfrac{9}{2} \le a \le 8 \\ (1-2a) - 16(4-a) = 7(2a-9) & \text{за} \quad 8 \le a \end{cases}\,.$$

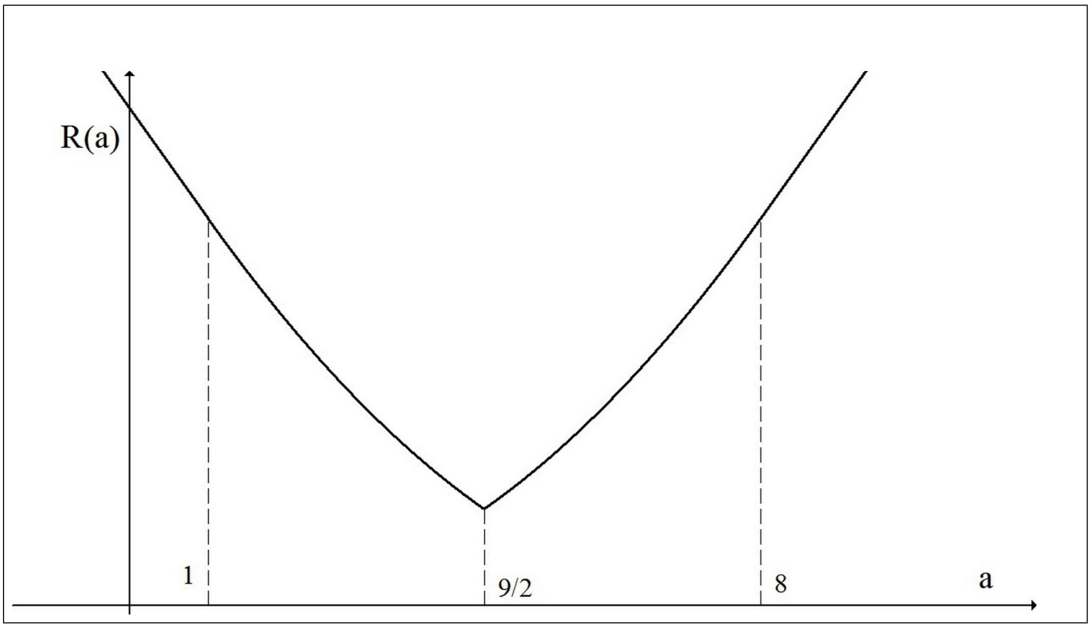








$R(a)$ е намаляваща в интервалите $(-\infty,\, 1]$ и $\left[1,\, \dfrac{9}{2}\right]$, и растяща в интервалите $\left[\dfrac{9}{2},\, 8\right]$ и $[8,\, +\infty)$. Следователно, най-малката ѝ стойност се достига за $a = \dfrac{9}{2}$.



Задача 10. Да се намери най-малкото цяло число k, за което уравнението $x^3 + kx + 2k + 15 = 0$ има поне един цял корен.

Решение. С полагане $y = x+2$ получаваме уравнението $y^3 - 6y^2 + (k+12)\,y + 7 = 0$. Целите му корени биха могли да бъдат ± 1, ± 7. При $y = 1$ имаме $k = -14$, при $y = -1$ имаме $k = -12$, при $y = 7$ имаме $k = -20$, при $y = -7$ имаме $k = -102$. Отговор -102.

II-ро решение. Нека b е цял корен на даденото уравнение. Тогава $b \neq -2$ и $k = -\left(b^2 - 2b + 4\right) - \dfrac{7}{b+2}$. Стойностите на b, за които k е цяло число, са 5, -1, -3, -9. Съответните стойности на k са -20, -14, -12, -102.

III-то решение. Нека a е цял корен на даденото уравнение. Тогава $a \neq 0$ и има цяло число b, за което $2k+15 = ab$. След заместване с $k = \dfrac{ab-15}{2}$ и опростяване получаваме $2a^2 + ab + 2b - 15 = 0$. Има цяло число c, за което $2b - 15 = ac$, откъдето $4a + ac + 2c + 15 = 0$, т.е. $(a+2)(c+4) = -7$. Възможните стойности на a са 5, -1, -3, -9, на c, съответно са -5, -11, 3, -3, откъдето стойностите на b са -5, 13, 3, 21, т.е. възможните стойности за k са -20, -14, -12, -102.