

ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Софтуерно инженерство"

30 юни 2009г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дефинирайте сума на Риман за функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Какво значи сумите на Риман да имат граница? Формулирайте критерия за интегрируемост по Риман с граница на риманови суми. Докажете, че ако сумите на Риман за дадената функция имат граница, то функцията е ограничена.

2. Докажете, че определеният интеграл е непрекъсната функция на горната си граница. Формулирайте теоремата на Нютон и Лайбниц. Пресметнете границата

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}.$$

3. Формулирайте и докажете интегралния критерий на Коши-Маклорен за сходимост на числов ред. При кои стойности на параметъра p е сходящ редът

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^p} \ln \frac{n-1}{n+1} ?$$

4. Докажете, че областта на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ е интервал с център a . Какво наричаме радиус на сходимост на този ред? Какъв е радиусът на сходимост на реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n ?$$

5. Дайте дефиниция на компакт в $\mathbb{R}^n$. Формулирайте необходимо и достатъчно условие едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ да е компактно. Формулирайте и докажете теоремата на Кантор за изображение с дефиниционна област в $\mathbb{R}^n$ и стойности в $\mathbb{R}^m$.

6. Напишете формула на Тейлър за двукратно гладка функция на n променливи до втори ред. Дайте дефиниция на положително (отрицателно) дефинитна квадратична форма. Формулирайте и докажете едно достатъчно условие дадена стационарна точка на функцията да е точка на локален минимум (максимум).

7. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x, y, z) = xyz$ при условия

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x + y + z = 0$$

Откъде сте сигурни, че те съществуват?