

ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Компютърни науки"

27 август 2011г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дефинирайте риманова сума за функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Какво означава римановите суми да имат граница, когато диаметърът на подразбиването клони към нула? Докажете, че ако римановите суми за f имат граница, то функцията f е ограничена. Формулирайте двете теореми, свързващи границата на римановите суми с римановия интеграл.

2. Докажете, че определеният интеграл е непрекъсната функция на горната си граница. Формулирайте теоремата на Нютон и Лайбниц.

3. Формулирайте и докажете интегралния критерий на Коши-Маклорен за сходимост на числов ред. За кои стойности на положителния параметър $\lambda > 0$ е сходящ редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{1}{n^{\lambda}} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^{\lambda}} \right) \right)$$

4. Докажете, че областта на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ е интервал с център a . Какво наричаме радиус на сходимост на този ред?

5. Дефинирайте норма и отворено кълбо в $\mathbb{R}^3$. Дайте дефиниция на отворено и на затворено подмножество на $\mathbb{R}^3$. Разгледайте множеството

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, 0 \leq z < 1 \right\}.$$

Отворено ли е то? А затворено ли е? Обосновете накратко отговорите си. Докажете, че едно подмножество на $\mathbb{R}^3$ е затворено точно тогава, когато заедно с всяка сходяща редица от свои елементи съдържа и нейната граница.

6. Формулирайте теоремата на Шварц за равенство на смесените частни производни. Разгледайте функцията

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ ако } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ ако } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Пресметнете $f''_{xy}(0, 0)$ и $f''_{yx}(0, 0)$. Ако сте смятали вярно, ще получите, че тези две частни производни са различни. Противоречи ли това на формулираната от Вас теорема? Коя от нейните предпоставки е нарушена в дадения пример?

7. Нека $\varphi(u, v)$ е двукратно гладка функция на два аргумента, дефинирана в $\mathbb{R}^2$, и $f(x, y) = \varphi\left(xy, \frac{x}{y}\right)$. Изразете частните производни до втори ред на f чрез частните производни до втори ред на φ .