

ИЗПИТ

по ДИС2, специалност "Компютърни науки"

22 юни 2015г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на равномерна сходимост на редица от функции в дадено множество. Разгледайте функциите

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n},$$

$n \in \mathbb{N}$. Дали редицата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в интервала $(0, 1)$? Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за равномерна сходимост на функционални редици.

2. Формулирайте и докажете критерия на Лайбниц за числови редове. Сходящ ли е редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n ?$$

3. Докажете, че областта на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е интервал с център a . Дефинирайте радиус на сходимост на степенен ред.

4. Развийте в ред на Маклорен функцията

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}.$$

Достатъчно е да определите само радиуса на сходимост на получения степенен ред.

5. Дефинирайте норма на вектор от $\mathbb{R}^3$. Дайте дефиниция на сходяща редица от точки в $\mathbb{R}^3$. Какво означава едно подмножество на $\mathbb{R}^3$ да е ограничено? Докажете, че всяка ограничена редица от елементи на $\mathbb{R}^3$ има сходяща подредица.

6. В диференциалното уравнение

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

преминете към нови променливи

$$u = x, \quad v = \frac{y}{x}.$$

Можете ли да намерите решенията на оригиналното уравнение?

7. Докажете, че ако вторият диференциал на двукратно гладка функция на много променливи в дадена критична точка е положително дефинитна квадратична форма, то функцията има локален минимум в точката.

8. Дайте дефиниция за локален условен екстремум. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ върху множеството, зададено с неравенството $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.