

ИЗПИТ

по ДИС2, специалност "Компютърни науки"

22 юни 2014г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Разгледайте несобствения интеграл от първи род $\int_a^\infty f(x)dx$. Какво означава този интеграл да е сходящ? Формулирайте необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на такъв интеграл. Какво означава този интеграл да е абсолютно сходящ? Докажете, че от абсолютна сходимост следва сходимост, но обратното не е вярно.

2. Дайте дефиниция на равномерна сходимост на редица от функции в дадено множество. Разгледайте функциите $f_n(x) = x^n(1 - x)$, $n \in \mathbb{N}$. Дали редицата $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ е равномерно сходяща в интервала $[0, 1]$? Отговорете на същия въпрос за редицата $\{nf_n\}_{n=1}^\infty$. Докажете, че границата на равномерно сходяща редица от непрекъснати функции е непрекъсната функция.

3. Формулирайте и докажете критерия на Коши за сходимост на числов ред. Изведете формулата на Коши-Адамар за радиус на сходимост на степенен ред. Намерете радиуса на сходимост на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + (-5)^n) x^{7n} .$$

4. Развийте в ред на Маклорен функцията

$$f(x) = \int_0^x \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) dt .$$

Достатъчно е да определите само радиуса на сходимост на получения степенен ред.

5. Дайте дефиниция на затворено множество в $\mathbb{R}^n$. Дайте дефиниция на затворена обвивка $\overline{A}$ на $A \subset \mathbb{R}^n$. Докажете, че

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset A, x_m \rightarrow_{m \rightarrow \infty} x\} .$$

6. Дайте дефиниция на диференцируемост на функция на повече от една променливи в дадена точка. Докажете, че от диференцируемост следва диференцируемост по всяко направление.

7. Формулирайте и докажете теоремата на Шварц за равенство на смесените производни.

8. Дайте дефиниция за локален условен екстремум. Формулирайте теоремата на Лагранж (необходимо условие за локален условен екстремум). Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ върху кривата с уравнение $x^2 + xy + y^2 = 1$.