ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Компютърни науки"
18 юни 2012г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Формулирайте и докажете теоремата на Нютон и Лайбниц. Пресметнете производната на функцията $F(x) = \int_{x^2}^{e^x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

2. Изведете формулата за лице на фигура, зададена в полярни координати. Пресметнете лицето на фигурата, заградено от кардидоидата

$$\rho(\theta) = 1 + \cos\theta \ , \ \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

3. Формулирайте и докажете критерия на Коши за сходимост на числов ред.

4. Дайте дефиниция на радиус на сходимост на степенен ред. Докажете, че ако е даден степенен ред, то неговият радиус на сходимост съвпада с радиуса на сходимост на реда, получен от него чрез формално почленно диференциране.

5. Дайте дефиниция на затворена обвивка на дадено подмножество A на $\mathbb{R}^n$. Докажете, че затворената обвивка на A съвпада с множеството от точките в $\mathbb{R}^n$, които са граници на сходящи редици от елементи на A. Коя е затворената обвивка на множеството

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 4, \ y \leq 0\Big\} \ ?$$

6. Кога една функция, дефинирана в отворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, е диференцируема в дадена точка от дефиниционната си област? Формулирайте теоремата за диференциране на съставни функции. Нека f е реалнозначна двукратно гладка функция, дефинирана в тримерното евклидово пространство. Пресметнете частните производни до втори ред на функцията

$$\varphi(x, y) := f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy) \ .$$

7. Нека $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ е гладка векторна функция на един аргумент с $\dot{\alpha}(t) \neq (0, 0)$. Пресметнете производната на

$$\varphi(t) = \ln(\|\alpha(t)\|) + \langle b, \alpha(t)\rangle \ ,$$

където $b := (2, 3)$. Какво означава кривата $\Gamma = \alpha([a, b])$ да е ректифицируема? Кое число наричаме нейна дължина? Пресметнете дължината на параметрично зададената крива

$$\alpha(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t) \ , \quad t \in [0, 2\pi] \ .$$

8. Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ в множеството $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$.