

ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Софтуерно инженерство"

16 юни 2008г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дефинирайте сума на Риман за функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Какво значи сумите на Риман да имат граница? Формулирайте критерия за интегруемост по Риман за граница на риманови суми. Докажете, че ако сумите на Риман за дадената функция имат граница, то функцията е ограничена.

2. Формулирайте теоремата на Нютон и Лайбниц. Пресметнете границата

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctg t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3. Формулирайте и докажете интегралния критерий на Коши-Маклорен за сходимост на числов ред. Сходящ ли е редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}}{\ln n} ?$$

4. Дайте дефиниция на равномерно сходяща редица от функции. Равномерно сходяща ли е редицата $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$ в интервала $[0, 1]$? Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за равномерна сходимост на редица от функции.

5. Дайте дефиниция на компакт в \mathbb{R}^n . Формулирайте необходимо и достатъчно условие едно подмножество на \mathbb{R}^n да е компактно. Формулирайте и докажете теоремата на Вайерщрас за изображение с дефиниционна област в \mathbb{R}^n и стойности в \mathbb{R}^m .

6. Докажете, че контурът на сечението на две подмножества на \mathbb{R}^n се съдържа в обединението на техните контури, т.е.

$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

7. Нека f е гладка функция на два аргумента, дефинирана в отвореното изпъкнало множество U , и $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ в U (т.е. градиентът на f се анулира в U). Докажете, че f е константа.

8. Нека $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ е гладка векторна функция на един аргумент с $\dot{\alpha}(t) \neq (0, 0)$. Пресметнете производната на

$$\varphi(t) = \sin(\|\alpha(t)\|)^3.$$

Какво означава кривата $\Gamma = \alpha([a, b])$ да е ректифицируема? Кое число наричаме нейна дължина? Пресметнете дължината на една арка на циклоидата

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$