ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Софтуерно инженерство"
16 юни 2007г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена функция. Дефинирайте малка и голяма сума на Дарбу за f при дадено подразделяне на интервала. Дайте дефиниция на интегруемост по Риман и на риманов интеграл. Докажете, че непрекъснатите функции са интегруеми по Риман.

2. Развийте в степенен ред около нулата функцията

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} \ .$$

Намерете $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x}$.

3. Формулирайте и докажете критерия на Даламбер и критерия на Лайбниц за сходимост на числов ред.

4. Дайте дефиниция на равномерно сходяща редица от функции. Равномерно сходяща ли е редицата $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ в интервала $[-1, 1]$? Формулирайте необходимото и достатъчно условие на Коши за равномерна сходимост на функционален ред. Формулирайте критерия на Вайерщрас. Равномерно сходящ ли е редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \ \mathrm{tg} \left(\frac{1}{3^n x} \right)$$

в интервала $(1, +\infty)$?

5. Нека v е вектор в $\mathbb{R}^n$, а $f : \Omega \to \mathbb{R}$ е скаларна функция, дефинирана в отвореното подмножество Ω на $\mathbb{R}^n$, която е диференцируема в точката $x_0 \in \Omega$. Нека $\langle \mathrm{grad} f(x_0), v\rangle > 0$. Докажете, че за всички достатъчно малки $t > 0$ е в сила $f(x_0 + tv) > f(x_0)$. (Не използвайте наготово това, което знаете за производна по направление, а повторете разсъждението.)

6. Диференцируема ли е функцията $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ в точката $(0, 0)$?

7. Нека φ е гладка функция на два аргумента, дефинирана в цялата равнина, и $f(x, y, z) = \varphi(x - y, y - z)$. Докажете, че f удовлетворява диференциалното уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \ .$$

8. Формулирайте необходимото условие на Лагранж за условен екстремум. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ при условие

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(тук $a > b > c > 0$).