

ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Компютърни науки"

8 септември 2012г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е ограничена функция. Дефинирайте малка и голяма сума на Дарбу за f при дадено подразделяне на интервала. Дайте дефиниция на интегруемост по Риман чрез подхода на Дарбу. Формулирайте критерий за интегруемост по Риман и го използвайте, за да докажете, че монотонните функции са интегруеми по Риман.

2. Формулирайте и докажете теоремата на Лайбниц и Нютон. Използвайте я, за да пресметнете границата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n}}.$$

3. Нека $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е степенен ред и $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1}$ е редът, получен от него чрез почленно диференциране. Докажете, че радиусите на сходимост на тези два степенни реда съвпадат. Развийте в степенен ред около нулата функцията

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Обосновете стъпките си, намерете областта на сходимост на получения степенен ред. Равномерно сходящ ли е той? Обосновете отговора си.

4. Нека K е подмножество на $\mathbb{R}^n$. Какво означава K да е компактно? Формулирайте необходимо и достатъчно условие за компактност на K и го докажете.

5. Нека $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е функция на два аргумента с дефиниционна област U , която е отворено подмножество на $\mathbb{R}^2$, и нека $\bar{x} \in U$. Какво значи f да е диференцируема в $\bar{x}$? Докажете, че ако f е диференцируема в $\bar{x}$, то частните производни на f в $\bar{x}$ съществуват. Докажете, че функцията

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

притежава частни производни в точката $\bar{x} = (0, 0)$, но не е диференцируема в тази точка.

6. Нека $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ е гладка векторна функция на един аргумент с $\dot{\alpha}(t) \neq (0, 0)$. Пресметнете производната на

$$\varphi(t) = \langle \alpha(t), (2, 3) \rangle,$$

където $\langle \cdot, \cdot \rangle$ е скаларното произведение в $\mathbb{R}^2$. Какво означава кривата $\Gamma = \alpha([a, b])$ да е ректифицируема? Кое число наричаме нейна дължина? Пресметнете дължината на астроида

$$\alpha(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

7. Напишете формула на Тейлър за двукратно гладка функция на n променливи до втори ред. Дайте дефиниция на положително дефинитна квадратична форма. Формулирайте и докажете едно достатъчно условие дадена стационарна точка на функцията да е точка на локален минимум.