

ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Компютърни науки"

6 юли 2011г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е ограничена функция. Дефинирайте малка и голяма сума на Дарбу за f при дадено подразделяне на интервала. Дайте дефиниция на интегруемост по Риман и на риманов интеграл чрез подхода на Дарбу. Формулирайте едно необходимо и достатъчно условие за интегруемост. Докажете, че монотонните функции са интегруеми по Риман.

2. Формулирайте и докажете Теоремата на Лайбниц и Нютон. Пресметнете

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt .$$

Указание: Първо си отговорете на въпроса сходящ ли е интегралът $\int_0^1 \frac{\cos t}{t^2} dt$.

3. За кои стойности на реалния параметър λ е сходящ интегралът

$$\int_0^1 \frac{(\operatorname{arctg} 3x)^\lambda}{\sin x - x + \frac{x^3}{6}} dt ?$$

4. Дайте дефиниция на равномерна сходимост в дадено множество D на функционален ред. Формулирайте и докажете критерия на Вайерщрас за равномерна сходимост. Докажете, че ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, то редовете $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ са равномерно сходящи върху цялата реална права.

5. Дайте дефиниция на компактно множество в n -мерното евклидово пространство. Формулирайте поне едно необходимо и достатъчно условие за компактност на дадено подмножество на $\mathbb{R}^n$. Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерщрас за функции с дефиниционна област в $\mathbb{R}^n$ и със стойности в реалната права.

6. Нека U е отворено множество в $\mathbb{R}^2$, а $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е скаларна функция, дефинирана в него. Какво значи f да е диференцируема в дадена точка от U ? Докажете, че от диференцируемост в дадена точка следва непрекъснатост на функцията в същата точка. Диференцируема ли е функцията $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ в началото на координатната система? **Указание:** За двумерната граница изследвайте поведението на функцията върху правите през началото на координатната система.

7. Намерете супремума и инфимума от стойностите на функцията

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$

в кръга $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$.