

ИЗПИТ

по ДИС2, специалност "Компютърни науки"

5 септември 2015г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ е интегрируема във всеки ограничен подинтервал на $[a, \infty)$. Кога интегралът $\int_a^\infty f(x)dx$ се нарича сходящ? А кога същият интеграл се нарича абсолютно сходящ? Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на несобствен интеграл от първи род. Докажете, че от абсолютна сходимост следва сходимост за несобствени интеграли от първи род. За кои стойности на реалния параметър λ е сходящ интегралът

$$\int_0^{1/2} \frac{(1 - \cos x)^\lambda (1 - x)^3}{\ln^2(1 - x)} dx ?$$

2. Формулирайте и докажете критерия на Даламбер за сходимост на числов ред, както и следствието от него (гранична форма на критерия).

3. Формулирайте теорема, даваща достатъчно условие границата на дадена редица от непрекъснати функции да е непрекъсната. Формулирайте теорема, даваща достатъчно условие границата на дадена редица от диференцируеми функции да е диференцируема. Докажете първата от формулираните теореми.

4. Развийте функцията

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

в ред на Маклорен. Обосновете стъпките си, намерете интервала на сходимост на получения степенен ред. Равномерно сходящ ли е той?

5. Формулирайте неравенството на Коши-Буняковски-Шварц, като дефинирате норма и скалярно произведение в $\mathbb{R}^3$. Нека векторът $x = (x_1, x_2, x_3)$ се мени в затвореното кълбо с център началото на координатната система и радиус 2. Коя е точната горна граница за множеството от числата $|5x_1 - 2x_2 + x_3|$? Дайте дефиниция на ограничено множество в $\mathbb{R}^3$. Докажете, че всяка ограничена редица от вектори в $\mathbb{R}^3$ има сходяща подредица.

6. Нека φ е гладка функция на два аргумента, дефинирана в цялата равнина, и $f(x, y, z) = \varphi(xy, \frac{y}{z})$. Докажете, че f удовлетворява диференциалното уравнение

$$-x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 0 .$$

7. Дайте дефиниция за локален условен екстремум. Формулирайте теоремата на Лагранж (необходимо условие за локален условен екстремум). Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x, y, z) = xyz$ при условие

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 .$$