

# ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Софтуерно инженерство"

5 септември 2010г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена функция. Дефинирайте малка и голяма сума на Дарбу за  $f$  при дадено подразделяне на интервала. Докажете, че всяка малка сума на Дарбу не надминава коя да е голяма сума на Дарбу. Дайте дефиниция на интегруемост по Риман чрез подхода на Дарбу.

2. Формулирайте и докажете теоремата на Нютон и Лайбниц. Напишете развитието в степенен ред около нулата на функцията

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt .$$

3. Формулирайте и докажете критерия на Даламбер за сходимост на числов ред.

4. Формулирайте теорема, даваща достатъчно условие границата на дадена редица от непрекъснати функции да е непрекъсната. Формулирайте теорема, даваща достатъчно условие границата на дадена редица от диференцируеми функции да е диференцируема. Докажете първата от формулираните теореми.

5. Докажете, че областта на сходимост на степенния ред  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$  е интервал с център  $a$ . Какво наричаме радиус на сходимост на този ред? Каква е областта на сходимост на реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} (x+3)^n ?$$

6. Формулирайте неравенството на Коши-Буняковски-Шварц, като дефинирате норма и скалярно произведение в  $\mathbb{R}^3$ . Нека векторът  $x = (x_1, x_2, x_3)$  се мени в затвореното кълбо с център началото на координатната система и радиус 2. Коя е минималната горна граница за числата  $|5x_1 - 2x_2 + x_3|$ ? Дайте дефиниция на ограничено множество в  $\mathbb{R}^3$ . Докажете, че всяка ограничена редица от вектори в  $\mathbb{R}^3$  има сходяща подредица.

7. Нека  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  е функция на два аргумента с дефиниционна област  $U$ , която е отворено подмножество на  $\mathbb{R}^2$ , и нека  $\bar{x} \in U$ . Какво значи  $f$  да е диференцируема в  $\bar{x}$ ? Докажете, че ако  $f$  е диференцируема в  $\bar{x}$ , то частните производни на  $f$  в  $\bar{x}$  съществуват. Докажете, че ако  $f$  е диференцируема в  $\bar{x}$ , то  $f$  е непрекъсната в  $\bar{x}$ .

8. Нека  $\varphi$  е двукратно гладка функция на три аргумента, дефинирана в  $\mathbb{R}^3$ , и  $f(t) = \varphi(t, t^2, t^3)$ . Изразете втората производна на  $f$  чрез частните производни до втори ред на  $\varphi$ .