

ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Компютърни науки"

5 юли 2013г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дефинирайте определен интеграл от дадена ограничена функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ в интервала $[a, b]$ чрез подхода на Дарбу. Докажете, че произведение на две интегрируеми функции е интегрируема функция.

2. Нека $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ е интегрируема във всеки ограничен подинтервал на $[a, \infty)$. Кога интегралът $\int_a^\infty f(x)dx$ се нарича сходящ? А кога същият интеграл се нарича абсолютно сходящ? Формулирайте и докажете необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на несобствен интеграл от първи род. Докажете, че от абсолютна сходимост следва сходимост за несобствени интеграли от първи род. За кои стойности на реалния параметър λ е сходящ интегралът

$$\int_0^{1/2} \frac{(1 - \cos x)^\lambda (1 - x)^3}{\ln^2(1 - x)} dx ?$$

3. Формулирайте теорема, даваща достатъчно условие границата на дадена редица от непрекъснати функции да е непрекъсната. Формулирайте теорема, даваща достатъчно условие границата на дадена редица от диференцируеми функции да е диференцируема. Докажете първата от формулираните теореми. Равномерно сходяща ли е редицата $f_n(x) = x^n$ в интервала $[0, 1]$?

4. Напишете формулата на Коши-Адамар за радиус на сходимост на степенен ред и я докажете. Намерете областта на сходимост на реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n} x^n .$$

5. Дефинирайте отворено кълбо с център $x \in \mathbb{R}^n$ и радиус $r > 0$. Дефинирайте какво означава едно подмножество U на $\mathbb{R}^n$ да е отворено. Докажете, че отворените кълба са отворени множества.

6. Нека $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, където U е отворено подмножество на $\mathbb{R}^2$, е двукратно гладка, и нека $x \in U$. Дефинирайте втори диференциал на f и докажете формулата на Тейлър за f около x от първи ред с остатък във формата на Лагранж.

7. Формулирайте необходимото условие на Лагранж за условен екстремум. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x, y) = \sqrt{2 - 2x^2 - y^2}$ върху елипсата $2(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Упътване: Внимавайте за дефиниционната област на функцията!