ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Софтуерно инженерство"
4 септември 2008г.
Име:.. Фак.номер:.............

1. Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена функция. Дефинирайте малка и голяма сума на Дарбу за f при дадено подразделяне на интервала. Докажете, че всяка малка сума на Дарбу не надминава коя да е голяма сума на Дарбу. Дайте дефиниция на интегруемост по Риман чрез подхода на Дарбу. Формулирайте критерий за интегруемост по Риман.

2. Развийте в степенен ред около нулата функциите

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \ , \quad g(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^5}} \ .$$

Намерете областите на сходимост на получените редове.

3. Намерете повърхнината на сфера с радиус R, използвайки формулата за повърхнина на ротационно тяло.

4. Какво значи редът $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ да е равномерно сходящ в $D \subset \mathbb{R}$? Формулирайте и докажете критерия на Вайерщрас за равномерна сходимост на функционален ред. Равномерно сходящ ли е редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ в интервала $[1, 10]$? А в интервала $[2, +\infty)$? Обосновете отговорите си.

5. Дайте дефиниция на ограничено множество в $\mathbb{R}^n$. Докажете, че всяка ограничена редица от вектори в $\mathbb{R}^2$ има сходяща подредица.

6. Нека $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ е функция на два аргумента с дефиниционна област U, която е отворено подмножество на $\mathbb{R}^2$, и нека $\bar{x} \in U$. Какво значи f да е диференцуема в $\bar{x}$? Докажете, че ако f е диференцуема в $\bar{x}$, то частните производни на f в $\bar{x}$ съществуват. Докажете, че ако частните производни на f съществуват в U и са непрекъснати в $\bar{x}$, то f е диференцуема в $\bar{x}$.

7. Нека φ е гладка функция на два аргумента, дефинирана в цялата равнина, и $f(x, y, z) = \varphi(xy, \frac{y}{z})$. Докажете, че f удовлетворява диференциалното уравнение

$$-x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \ .$$

8. Нека $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ е гладка векторна функция на един аргумент. Пресметнете производната на

$$\varphi(t) = \langle \alpha(t), (2t, \ln t) \rangle \ ,$$

където $\langle \cdot, \cdot \rangle$ е скаларното произведение в $\mathbb{R}^2$.