

ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Софтуерно инженерство"

2 септември 2007г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дефинирайте определен интеграл от дадена функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ в интервала $[a, b]$ чрез суми на Риман. Докажете, че сума на две интегрируеми функции е интегрируема и интегралът от сумата е сума на интегралите от събираемите.

2. Формулирайте и докажете теоремата на Лайбниц и Нютон. Пресметнете

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{(\sin x)^2}.$$

3. Формулирайте теорема, даваща достатъчно условие границата на дадена редица от непрекъснати функции да е непрекъсната. Формулирайте теорема, даваща достатъчно условие границата на дадена редица от диференцируеми функции да е диференцируема. Докажете първата от формулираните теореми.

4. Развийте функцията $\arctg$ в степенен ред около нулата. Обосновете стъпките си, намерете интервала на сходимост на получения степенен ред. Равномерно сходящ ли е той?

5. Нека U е отворено множество в $\mathbb{R}^2$, а $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ е скалярна функция, дефинирана в него. Какво значи f да е диференцируема в дадена точка от U ? Диференцируема ли е функцията

$$f_1(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

в началото на координатната система? Отговорете на същия въпрос за функцията

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

6. Нека φ е гладка функция на два аргумента, дефинирана в цялата равнина, и $f(x, y, z) = \varphi(xy, \frac{y}{z})$. Докажете, че f удовлетворява диференциалното уравнение

$$-x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

7. Формулирайте необходимото условие на Лагранж за условен екстремум. Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x, y, z) = xyz$ при условие

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$