ИЗПИТ

по Анализ II част, специалност "Софтуерно инженерство"
2 септември 2007г.
Име:.. Фак.номер:............

1. Дефинирайте определен интеграл от дадена ограничена функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ в интервала $[a, b]$ чрез суми на Дарбу. Докажете, че произведение на две интегруеми функции е интегруема функция.

2. Формулирайте и докажете теоремата на Лайбниц и Нютон. Формулирайте и докажете теорема за смяна на променливите в определения интеграл.

3. Формулирайте принципа за сравнение между несобствени интеграли. Дайте дефиниция на абсолютно сходящ и на условно сходящ интеграл от първи род. Изследвайте за абсолютна сходимост интегралите

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x \ , \ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

4. Развийте функцията arcsin в степенен ред около нулата. Обосновете стъпките си, намерете интервала на сходимост на получения степенен ред.

5. Дайте дефиниция на отворено множество в $\mathbb{R}^n$. Докажете, че сечение на краен брой отворени множества в $\mathbb{R}^n$ е отворено множество.

6. Нека $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ е функция на два аргумента с дефиниционна област U, която е отворено подмножество на $\mathbb{R}^2$, и нека $\bar{x} \in U$. Какво значи f да е диференцуема в $\bar{x}$? Докажете, че ако f е диференцуема в $\bar{x}$, то частните производни на f в $\bar{x}$ съществуват. Докажете, че ако частните производни на f съществуват в U и са непрекъснати в $\bar{x}$, то f е диференцуема в $\bar{x}$. Диференцируема ли е функцията

$$f_1(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \ , & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \ , & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

в началото на координатната система? Отговорете на същия въпрос за функцията

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} \ , & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \ , & (x, y) = (0, 0) \ . \end{cases}$$

7. Нека φ е гладка функция на два аргумента, дефинирана в цялата равнина, и $f(x, y, z) = \varphi(x - y, y - z)$. Докажете, че f удовлетворява диференциалното уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \ .$$