ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Компютърни науки"
31 януари 2013г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Дайте дефиниция на $\sup A$, където A е непразно ограничено отгоре множество от реални числа. Докажете теоремата на Кантор-Хели: Нека е дадена фамилия $\{[a_\alpha, b_\alpha] : \ \alpha \in A\}$, състояща се от затворени ограничени интервали от реални числа. Нека всеки два интервала от тази фамилия имат непразно сечение ($[a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}] \cap [a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}] \neq \emptyset \ \forall \alpha_1 \in A \ \forall \alpha_2 \in A$). Тогава сечението на цялата фамилия от интервали е непразно:

$$\bigcap_{\alpha \in A} [a_\alpha, b_\alpha] \neq \emptyset \ .$$

2. Дайте дефиниция на сходяща редица. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са две сходящи редици от реални числа, чиито граници са съответно a и b. Докажете, че редицата $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и границата ѝ е ab.

3. Формулирайте необходимото и достатъчно условие на Коши за сходимост на редица. Какво означава за една редица условието на Коши да не е вярно? Докажете, че една редица от реални числа е сходяща точно тогава, когато за нея е изпълнено условието на Коши.

4. Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, където D е множество от реални числа. Дайте дефиниция на "f е непрекъсната в D". Непрекъсната ли е функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ako } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \\ x, & \text{ako } x \in [1, +\infty) \end{cases} \qquad ?$$

Формулирайте и докажете Теоремата на Вайерщрас.

5. Напишете дефиницията за производна в дадена точка. Докажете, че от диференцируемост в дадена точка на функцията f следва непрекъснатост на f в същата точка. В кои точки от дефиниционния си интервал е диференцируема функцията $f(x) = \left|(x-2)^2(x-3)\right|$?

6. Нека $[a, b]$ е краен затворен интервал и $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция върху него, която е диференцуема в отворения интервал (a, b). Нека знаем, че съществува границата $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = l$. Докажете, че границата $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (дясната производна на f в a) съществува и е равна на l. Разгледайте функцията $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$, дефинирана в интервала $(0, +\infty)$. Скицирайте графиката ѝ, без да се интересувате от изпъкналост. Може ли да я додефинирате по подходящ начин за $x = 0$ така, че получената функция да е непрекъсната в нулата? Използвайте току-що доказания факт, за да намерите ъгловия коефициент на допирателната към графиката на додефинираната функция в точката от нейната графика с нулева първа координата.

7. Формулирайте и докажете достатъчно условие една n-кратно диференцируема функция да има екстремум в дадена точка.

8. Дайте дефиниция на изпъкнала функция. Формулирайте достатъчно условие за изпъкналост на двукратно диференцируема функция. Докажете, че за всеки две реални числа $x > 0$, $y > 0$ е в сила неравенството

$$\frac{x \ln x + y \ln y}{2} \geq \frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2} \ .$$