ИЗПИТ

по ДИС1, специалност "Компютърни науки"
20 февруари 2015г.
Име:... Фак.номер:............

1. Дайте дефиниция на инфимум на ограничено отдолу непразно множество A от реални числа. Какво означава дадено реално число да не е инфимум на A?

2. Дайте дефиниция на точка на сгъстяване на редица от реални числа. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа и a е реално число. Нека от всяка подредица на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ може да се избере подредица с граница a. Докажете, че $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща.

3. Дайте дефиниция на $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -6$ във формата на Коши и във формата на Хайне. Докажете, че ако $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -6$ в смисъл на Коши, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -6$ в смисъл на Хайне.

4. Нека D е множество от реални числа, а f е реалнозначна функция, дефинирана в D. Дайте дефиниция на "f е непрекъсната". Формулирайте и докажете теоремата на Вайерщрас.

5. Напишете дефиницията за диференцируемост на функция в дадена точка. Скицирайте графиката на функцията $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, без да се интересувате от интервалите на вдлъбнатост и изпъкналост. Има ли допирателна към графиката на тази функция, когато аргументът е равен на нула?

6. Напишете формулата на Тейлър с остатък във формата на Пеано и с остатък във формата на Лагранж, като формулирате и достатъчни условия върху функцията, при които са в сила съответните формули. Напишете развитията на $\sqrt{1+x}$ и на експонентата около нулата и ги използвайте, за да пресметнете границата

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1} \right] .$$

7. Дайте дефиниция на сума на Риман за функцията $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (като дефинирате и подразбиване, представителни точки и диаметър на подразбиване). Какво означава сумите на Риман за дадена функция да имат граница? Докажете, че ако сумите на Риман за дадена функция имат граница, то функцията е ограничена.

8. Формулирайте теоремата на Лайбниц и Нютон. Пресметнете границата

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} e^{t^2} \mathrm{d}t}{x} ,$$

като обосновете стъпките си.