

# ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Софтуерно инженерство"

11 юли 2010г.

Име:..... Фак.номер:.....

1. Дайте дефиниция на сходяща редица. Какво означава една редица от реални числа да е монотонна? Докажете, че ограничените монотонни редици са сходящи.

2. Дайте дефиниция на точка на съгъстяване на дадена редица от реални числа. Докажете, че една редица е сходяща точно тогава, когато е ограничена и има само една точка на съгъстяване. Използвайте наготово единствено принципа за компактност (теорема на Болцано-Вайершрас). Дайте пример на редица с единствена точка на съгъстяване, която не е сходяща.

3. Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , където  $D$  е множество от реални числа. Дайте дефиниция на " $f$  е непрекъсната в  $D$ ". Дайте дефиниция на " $f$  е равномерно непрекъсната в  $D$ ". А какво означава  $f$  да не е равномерно непрекъсната в  $D$ ? Дали функцията  $g(x) = \frac{1}{x}$  е непрекъсната (равномерно непрекъсната) в интервала  $(0, +\infty)$ ? Отговорете на същите въпроси за интервалите  $(0, 1)$  и  $(1, +\infty)$ .

4. Формулирайте и докажете Теоремата на Вайершрас. Дайте примери, доказващи, че всяко от условията на теоремата е съществено за заключението. (Достатъчна е скица на графиката).

6. Напишете полинома на Тейлър за дадена функция (на какви условия трябва да отговаря тя?) до  $n$ -ти ред с остатък във формата на Пеано и с остатък във формата на Лагранж. Напишете развитието на Тейлър за  $f(x) = e - (1+x)^{\frac{1}{x}}$  до  $o(x^3)$ .

6. Формулирайте и докажете Теоремата на Рол. Формулирайте Теоремата на Лагранж за крайните нераствания. Използвайте я, за да докажете неравенството

$$\frac{x-y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$$

ако  $0 < y < x$ .

7. Изразете интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

чрез  $I_{n-1}$  (тук  $a$  е положителен параметър и  $n = 2, 3, 4, \dots$ ).