ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Компютърни науки"
3 февруари 2011г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Дайте дефиниция на сходяща редица. Докажете, че сходящите редици са ограничени. Дайте дефиниция на точка на сгъстяване на дадена редица от реални числа. Какво означава "редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ от реални числа няма точка на сгъстяване"?

2. Да се докаже, че ако съществува реално число a такова, че от всяка подредица на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ може да се избере подредица с граница a, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща редица с граница a.

3. Дайте дефиниция на $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ във формата на Хайне и във формата на Коши, където $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Какво трябва да предположите за D, за да е смислена дадената дефиниция? Докажете, че ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ в смисъл на Коши, то f клони към l, когато аргументът клони към x_0, в смисъл на Хайне.

4. Формулирайте и докажете Теоремата на Болцано (теоремата за междинните стойности). Покажете, че всяко от условията на теоремата е съществено за валидността на заключението (достатъчни са скици на графики като примери). Нека $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, която приема само рационални стойности и $f(0) = 2$. Колко е $f(1)$?

5. Напишете дефиницията за диференцируемост на функция в дадена точка. Диференцируема ли е функцията

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & ,\text{ako } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{e} & ,\text{ako } |x| > 1 \end{cases}$$

върху реалната права? Ако да, пресметнете производната на f.

6. Формулирайте и докажете критерия за монотонност на диференцируема функция. Докажете, че $\ln(1+x) \leq x$ за всяко $x \in (-1, +\infty)$.

7. Формулирайте и докажете достатъчно условие една n-кратно диференцируема функция да има екстремум в дадена точка.

8. Дайте дефиниция на изпъкнала функция. Формулирайте неравенството на Йенсен. Докажете, че функцията $f(x) = x^x$ е изпъкнала в интервала $(0, +\infty)$. Използвайте това, за да докажете неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} (2i)^{2i} \geq n(n+1)^{n+1} \ .$$

Изполвайте наготово формулата $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \dfrac{1}{2} n(n+1)$.