ИЗПИТ

по Анализ I част, специалност "Компютърни науки"
19 юли 2011г.
Име:... Фак.номер:............

1. Дайте дефиниция на сходяща редица. Докажете, че сходящите редици са ограничени. Какво означава "редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ от реални числа не е сходяща"?

2. Формулирайте и докажете Теоремата на Болцано-Вайерщрас (принцип за компактност).

3. Дайте дефиниция на непрекъсната функция. Формулирайте и докажете Теоремата на Болцано (теоремата за междинните стойности). Покажете, че всяко от условията на теоремата е съществено за валидността на заключението (достатъчни са скици на графики като примери). Има ли корен уравнението $\operatorname{tg} x = x$ в интервала $\left(-\frac{\pi}{2} + 11\pi, \frac{\pi}{2} + 11\pi\right)$?

4. Напишете дефиницията за диференцируемост на функция в дадена точка. Диференцируема ли е функцията

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, ako } x < 0 \\ \ln(1+x) & \text{, ako } x \geq 0 \end{cases}$$

върху реалната права? Ако да, пресметнете производната на f. Докажете, че ако функцията f е диференцируема в дадена точка, то f е непрекъсната в тази точка.

5. Докажете неравенството

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

при положителни x, y, p, q и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

6. Формулирайте и докажете достатъчно условие една n-кратно диференцируема функция да има екстремум в дадена точка.

7. Дайте дефиниция на изпъкнала функция. Формулирайте неравенството на Йенсен. Докажете, че функцията $f(x) = x^{-2}$ е изпъкнала в интервала $(0, +\infty)$. Използвайте това, за да докажете неравенството

$$n^3 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\right) ,$$

където x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ са произволни положителни числа.