

§ Въпрос 23

Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснати функции. Теорема на Нютон-Лайбниц

Нека $f(x)$ е функция, която е дефинирана и ограничена в краен и затворен интервал $[a, b]$, където $a < b$. Ще разделим $[a, b]$ на краен брой подинтервали $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ с помощта на точките $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, при което $x_0 = a, x_n = b$.

Дефиниция 1. Числото $d(\Delta_n) = \max_{i=1, \dots, n} \{x_i - x_{i-1}\}$ се нарича диаметър на разбиването $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Нека имаме n точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, избрани така, че $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, при $i = 1, 2, \dots, n$.

Дефиниция 2. Сумата $\sigma(\xi, \Delta_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ се нарича сума на Риман на функцията f за точките ξ_i на разбиването Δ_n .

Дефиниция 3. Казваме, че една функция $f(x)$, която е дефинирана и ограничена в един краен интервал $[a, b]$ е интегрима в смисъл на Риман в този интервал, ако каквото и $\varepsilon > 0$ да вземем, съществува $\delta > 0$, такова, че за всяко $d < \delta$ е в сила $|\sigma(\xi, \Delta_n) - I| < \varepsilon$, независимо от избора на междинните точки. $\lim_{d \rightarrow 0} \sigma(\xi, \Delta_n) = I$. Означаваме тази граница с $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема 1. Ако една функция $f(x)$ е интегруема по Риман, то тя е ограничена.

Доказателство. Да допуснем, че $f(x)$ е неограничена в интервала $[a, b]$. Фиксираме си деление $\Delta_n = x_0, x_1, \dots, x_n \Rightarrow f(x)$ е неограничена в $[x_{j-1}, x_j]$ за някое $j = 1, \dots, n$. Нека разгледаме две Риманови суми:

$$\begin{aligned} & \sigma(\xi, \Delta_n), \quad \sigma(\bar{\xi}, \Delta_n) \\ & \sigma(\xi, \Delta_n) - \sigma(\bar{\xi}, \Delta_n) = \sum_{j=1}^n [f(\xi_j) - f(\bar{\xi}_j)](x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

$f(\xi_j)$ - фиксирано; $f(\bar{\xi}_j)$ - мени се

Ако $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, то $\bar{\xi}_j = \{\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n\}$. Движейки $\bar{\xi}_j$ напред и назад и от неограничеността на $f(x)$, то може да получим достатъчно големи разлики, което да надминава δ от дефиницията, с което ще достигнем до противоречие. И следователно, $f(x)$ е ограничена.

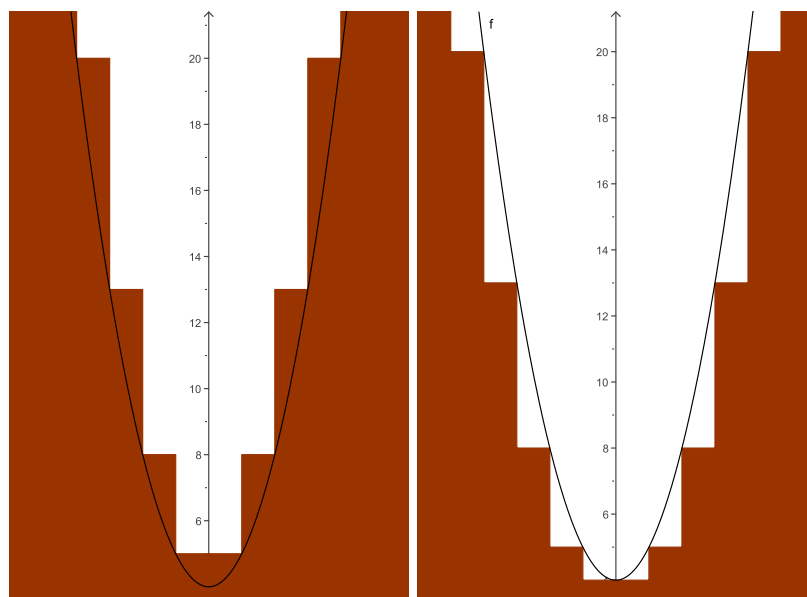
Т.к. функцията $f(x)$ е ограничена в интервала $[a, b]$, тя ще бъде ограничена и във всеки негов подинтервал. Да означим с M_i точната горна и с m_i точната долна граница на $f(x)$ в интервала $[x_i, x_{i+1}]$.

Дефиниция 4. Сумите

$$s(f, \Delta_n) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad S(f, \Delta_n) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

се наричат малка и голяма сума на Дарбу.

В случая, когато функцията приема само неотрицтелни стойности, не е трудно да се даде геометрично тълкувание:



Фигура 10.1: Голяма и малка сума на Дарбу

Множеството от всички суми на Дарбу (както малките, така и големите) е ограничено (и отгоре и отдолу). Ако M е една горна граница на $f(x)$, а m е една долна граница на същата функция в $[a, b]$ и като вземем предвид, че

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

получаваме

$$\sum_{i=1}^n m(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M(x_i - x_{i-1})$$

от друга страна

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m(x_i - x_{i-1}) &= m[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] = \\ &= m(x_n - x_0) = m(b - a) \\ \sum_{i=1}^n M(x_i - x_{i-1}) &= M[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] = \\ &= M(x_n - x_0) = M(b - a) \end{aligned}$$

и следователно

$$m(b - a) \leq s(f, \Delta_n) \leq S(f, \Delta_n) \leq M(b - a).$$

Нека означим с $\underline{I}$ точната горна граница на $f(x)$, а с $\bar{I}$ точната долна граница на $f(x)$ в интервала $[a, b]$.

Дефиниция 5. Точната горна граница на множеството на малките суми на Дарбу на една ограничена функция $f(x)$ в интервал $[a, b]$ се нарича долен интеграл на $f(x)$ и се бележи с

$$\int_a^b f(x) dx$$

Дефиниция 6. Точната долна граница на множеството на малките суми на Дарбу на една ограничена функция $f(x)$ в интервал $[a, b]$ се нарича горен интеграл на $f(x)$ и се бележи с

$$\int_a^b f(x) dx$$

Имаме, че $\underline{I} \leq S(f, \Delta_n)$ и $s(f, \Delta_n) \leq \bar{I}$

Дефиниция 7. Една функция $f(x)$ е интегруема в смисъл на Дарбу, ако $\underline{I} = \bar{I}$.

Сега ще установим, че ако въведем други точки на деление на интервала, то малките суми на Дарбу не намаляват и големите суми на Дарбу не растат.

Доказателство. Нека въведем нова точка на деление ξ и означим с s' и S' сумите на Дарбу, които получаваме, когато към точките на деление прибавим и ξ . В такъв случай

$$s \leq s', \quad S \leq S'$$

Ако точката ξ съвпада с една от точките $x_0, x_1, \dots, x_n$, то новото деление не се различава от старото. Нека не съвпада с нито една от тези точки. Нека k е най-малкото цяло положително число, за което $\xi < x_k$. Тогава $x_{k-1} < \xi$. Нека L_1 е точната горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{k-1}, \xi]$, а L_2 е точната горна граница на $f(x)$ в подинтервала $[\xi, x_k]$. Тогава имаме

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + L_1(\xi - x_{k-1}) + L_2(x_k - \xi) + \sum_{i=k+1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \\ S &= \sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \\ S' - S &= L_1(\xi - x_{k-1}) + L_2(x_k - \xi) - M_k(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

От друга страна

$$L_1 \leq M_k, \quad L_2 \leq M_k,$$

защото M_k е горна граница на $f(x)$ в целия подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$ и следователно е горна граница и във всеки от подинтервалите $[x_{k-1}, \xi]$ и $[\xi, x_k]$ $\Rightarrow$

$$S' - S \leq M_k(\xi - x_{k-1}) + M_k(x_k - \xi) - M_k(x_k - x_{k-1}) = 0,$$

с което показваме, че $S' \leq S$. Неравенството $s' \geq s$ се доказва аналогично.

Сега нека разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали по два начина, с помощта на две системи от делящи точки.

$$a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_p = b \quad (1)$$

$$a = x''_0 < x''_1 < \dots < x''_q = b \quad (2)$$

и нека s е малката сума на Дарбу, която отговаря на системата (1), а S е голямата сума на Дарбу, която отговаря на системата (2), в такъв случай $s \leq S$. За да докажем това, означаваме с s_k малката сума на Дарбу, която получаваме, когато делим $[a, b]$ с помощта на точките

$$x'_0, x'_1, \dots, x'_p; x''_1, x''_2, \dots, x''_k \quad (1 \leq k \leq q)$$

а с S'_k означаваме голямата сумана Дарбу, когато делим $[a, b]$ с помощта на точките

$$x''_0, x''_1, \dots, x''_q; x'_1, x'_2, \dots, x'_k \quad (1 \leq k \leq p)$$

Съгласно доказаното по-горе имаме

$$s \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_q$$

$$S \geq S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_p,$$

от друга страна, сумите s_q и S_p са образувани с помощта на едни и същи точки на делене, т.е.

$$s_q \leq S_p$$

и следователно

$$s \leq S.$$

Теорема 2. Една функция $f(x)$ е интегруема по Риман в интервала $[a, b]$, тогава и само тогава, когато за $\forall \varepsilon > 0$ да може да намерим такова деление Δ_n , че $S - s < \varepsilon$

Доказателство. $\Rightarrow$) Нека $f(x)$ е интегруема по Риман. Нека $\varepsilon > 0$. Тогава съществува $\delta > 0$, за каквото и да е разделение на интервала $[a, b]$, диаметъра $d < \delta$ и $|\sigma - I| < \varepsilon$, т.е.

$$|\sigma - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$$

$$|\sigma - \int_a^b f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Ако L_1 е точната долна граница на $f(x)$ в подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$, а L_2 е точната горна граница на $f(x)$ в същия подинтервала, и ако ξ_i е в същия интервал, тогава

$$0 \leq f(\xi_i) - L_1 \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

$$0 \leq L_2 - f(\xi_i) \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}](x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sigma - \frac{\varepsilon(b-a)}{4(b-a)} > \int_a^b f(t)dt - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} \\ &\Rightarrow s > \int_a^b f(t)dt - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} S &> \int_a^b f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow S - s &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$)

Нека е изпълнено, че за $\forall \varepsilon > 0$ съществува деление Δ_n , такова, че

$$S(f, \Delta_n) - s(f, \Delta_n) < \varepsilon$$

$$s(f, \Delta_n) \leq \int_a^b f(t)dt \leq S(f, \Delta_n) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Аналогично:

$$S(f, \tilde{\Delta}_k) - \frac{\varepsilon}{3} \leq \int_a^b f(t)dt \leq S(f, \tilde{\Delta}_k)$$

От def за горен и долен интеграл съществуват такива суми.

За дадено число ε съществуват

$$\min(x_i - x_{i-1}); \min(\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1}),$$

където

$$\begin{aligned} x_{i-1} < \tilde{x}_{j-1} < x_i < \tilde{x}_j < x_{i+1} &\Rightarrow \\ 0 < \delta = \min\{\min(x_i - x_{i-1}); \min(\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1})\} & \\ d(\tilde{\Delta}_m) = \max(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1}) < \delta & \\ s(f, \tilde{\Delta}_m) \leq \sigma(f, \tilde{\Delta}_m, \xi) \leq S(f, \tilde{\Delta}_m) & \\ \delta < \frac{\varepsilon}{6M(n+k)}, \quad M = \sup_{t \in [a,b]} f(t) & \end{aligned}$$

Погрижили сме се точките $\tilde{x}_j$ да са толкова близки, че да не попадне между тях точка x_i .
Нека

$$\begin{aligned} m_j &= \inf_{t \in [\tilde{x}_{j-1}, x_j]} f(t) \\ m_j(\tilde{x}_j - x_i) + m_j(x_i - \tilde{x}_{j-1}) &= m_j(\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1}) \\ m_j - \inf_{t \in [\tilde{x}_j, x_i]} f(t)(\tilde{x}_j - x_i) + \inf_{t \in [x_i, \tilde{x}_j]} f(t)(\tilde{x}_j - x_i) &+ \\ m_j - \inf_{t \in [\tilde{x}_{j-1}, x_i]} f(t)(x_i - \tilde{x}_{j-1}) + \inf_{t \in [\tilde{x}_{j-1}, x_i]} f(t)(x_i - \tilde{x}_{j-1}) & \\ -2M \leq m_j - \inf_{t \in [\tilde{x}_j, x_i]} f(t) \leq 0 &\Rightarrow \\ -2M \leq m_j - \inf_{t \in [x_{j-1}, x_i]} f(t) \leq 0 & \\ m_j(\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1}) \geq \inf_{t \in [\tilde{x}_j, x_i]} f(t)(\tilde{x}_j - x_i) + \inf_{t \in [\tilde{x}_{j-1}, x_i]} f(t)(x_i - \tilde{x}_{j-1}) - 2M(\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1}) & \\ d(\tilde{\Delta}_m) \leq \delta & \end{aligned}$$

Нека делението

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{m_1} &= (\tilde{\Delta}_m \cup \Delta_n) \\ s(f, \tilde{\Delta}_m) &\leq S(f, \tilde{\Delta}_{m_1}) \\ s(f, \tilde{\Delta}_m) &= s(f, \tilde{\Delta}_{m_1}) - 2Mn\delta \\ s(f, \tilde{\Delta}_{m_1}) - 2Mn\delta &\leq s(f, \Delta_n) \leq \sigma(f, \tilde{\Delta}_m, \xi) \leq S(f, \tilde{\Delta}_m) \\ s(f, \Delta_n) &= s(f, \tilde{\Delta}_{m_1}) - 2Mn\delta \\ s(f, \Delta_n) - 2Mn\delta &\geq \int_a^b f(t)dt - \frac{\varepsilon}{3} - 2Mn\delta \\ \tilde{\Delta}_{m_2} &= (\tilde{\Delta}_m \cup \tilde{\Delta}_k) \\ \sigma(f, \tilde{\Delta}_m, \xi) &\leq S(f, \tilde{\Delta}_m) \leq S(f, \tilde{\Delta}_{m_2}) + 2Mk\delta \\ S(f, \tilde{\Delta}_k) + 2Mk\delta &\leq \int_a^b f(t)dt + \frac{\varepsilon}{3} + Mk\delta \\ I - \frac{\varepsilon}{3} - 2Mn\delta &\leq \sigma(f, \tilde{\Delta}_m, \xi) \leq I + \frac{\varepsilon}{3} + 2Mk\delta \\ |\sigma(f, \tilde{\Delta}_m, \xi) - I| &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + 2M\delta(k+n) < \frac{2\varepsilon}{3} + 2M\delta(k+n) \frac{\varepsilon}{6M(k+n)} \\ &\Rightarrow |\sigma(f, \tilde{\Delta}_m, \xi) - I| < \varepsilon \Rightarrow \end{aligned}$$

f е интегруема по Риман.

Теорема 3 (За равномерна непрекъснатост). Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в краен и затворен интервал $[a, b]$, и ако $\varepsilon > 0$, то интервалът $[a, b]$ може да бъде разделен на краен брой подинтервали, по такъв начин, че осцилацията (разликата между точната горна и точната долна граница) във всеки един от тях да бъде по-малка от ε .

Теорема 4. Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в краен и затворен интервал $[a, b]$, то тя е интегруема (Риман).

Доказателство. Избираме си едно $\varepsilon > 0$. Т.к. $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то може да разделим интервала по следния начин:

$$\Delta_n = x_0, x_1, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

където осцилацията на $f(x)$ във всеки един от тези подинтервали да е по-малка от $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Нека M_i е точната горна граница на функцията в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, а m_i е точната долна граница на функцията в същия интервал. Образоваме си сумите на Дарбу:

$$s = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\begin{aligned} S - s &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= (M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + (M_2 - m_2)(x_2 - x_1) + \dots + (M_n - m_n)(x_n - x_{n-1}) < \\ &\frac{\varepsilon}{b-a}[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow S - s < \varepsilon$ и от предната теорема следва, че $f(x)$ е интегруема (Риман).

Основни свойства на определения интеграл:

I. Ако интегруемата в интервала $[a, b]$ функция $f(x)$ удовлетворява неравенствата

$$m \leq f(x) \leq M,$$

то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

където m и M са константи

Ако $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

II. Ако функцията $f(x)$, дефинирана в интервала $[a, b]$ е интегруема, и ако C е константа, то

$$\int_a^b C f(x)dx = C \int_a^b f(x)dx$$

III. Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$, дефинирани в интервала $[a, b]$ са интегруеми, то:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

IV. Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$, и ако $f(x) \leq g(x)$ за всяко x , принадлежащо на интервала $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

V. Ако $f(x)$ е интегруема в $[a, b]$, то и $|f(x)|$ е интегруема, при това

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

VI. Ако $f(x)$ е дефинирана и ограничена в $[a, b]$, а C е една вътрешна точка от същия интервал, то $f(x)$ е интегруема в $[a, b] \Leftrightarrow$ когато е интегруема във всеки един от интервалите $[a, c]$ и $[c, b]$, като при това:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

VIII. Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в някакъв интервал, то и тяхното произведение е интегруемо в същия интервал.

Теорема 5. (Коши) Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и l и L са най-малката и най-голямата стойност на $f(x)$ в интервала $[a, b]$, тогава за всяко $y \in [l, L]$ съществува $x \in [a, b] : f(x) = y$.

Теорема 6. (За средните стойности) Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, то съществува ξ , такова, че $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

Доказателство. Да означим с m и с M точната долна и точната горна граница на $f(x)$ в $[a, b]$. От това, че

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Rightarrow$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M \quad (3)$$

От теоремата на Вайерщрас $\Rightarrow$, че съществуват $x_1, x_2 \in [a, b]$:

$$f(x_1) = m, f(x_2) = M \quad (4)$$

Считаме, че $x_1 \neq x_2$, в противен случай, $f(x)$ ще бъде константа. Като вземем предвид неравенствата (3) и (4) и от предната теорема на Коши $\Rightarrow$

$$\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Теорема 7. (Лайбниц-Нютон) Ако $f(x)$ е непрекъсната в един интервал D , то функцията $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е диференцируема в този интервал и за $\forall x \in D$ е изпълнено:

$$F'(x) = f(x) \quad (5)$$

т.е. $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в D .

Доказателство. Нека $x \in D$ (x е произволно) и $(x+h) \in D$ (h е произволно) $\Rightarrow$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right] =$$

$$\frac{1}{h} \left[\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right] =$$

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Към последния интеграл прилигаме теоремата за средните стойности и получаваме:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi) \quad \xi \in [x, x+h]$$

Ако $h \rightarrow 0$, то $\xi \rightarrow x$. Ето защо, като вземем предвид непрекъснатостта на $f(x)$ в т.х ще получим:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x).$$

Теоремата на Лайбниц-Нютон ни дава един прост начин за пресмятане на определен интеграл:

Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$. Ще пресметнем стойността на интеграла $\int_a^b f(x)dx$

Чрез (5) дефинираме $F(b) = \int_a^b f(x)dx$. $F(x)$ е примитивна на $f(x)$. Нека вземем коя да е примитивна

функция $\Phi(x)$ на $f(x)$ в интервала $[a, b]$. Ще имаме, че $F(x) = \Phi(x) + C$, където C е някаква константа.

Нека $x = a \Rightarrow F(a) = \Phi(a) + C$, но $F(a) = 0 \Rightarrow C = -\Phi(a) \Rightarrow$
 $\forall x \in [a, b]$ е изпълнено $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$

При $x = b \Rightarrow F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$

Компютърен набор и рецензия: Мариана Митевска m_mitevaska@abv.bg
Със съдействието на Митко и Бояна