

Тема 22

Теорема за средните стойности
(Фол, Лагранж, Коши).
Формула на Тейлър.



Imperial
Training Camp

!NB! $f(x)$ - ф-ция

• Локален максимум:

Нека $f(x)$ е дефинирана в околност M на т. $x_0 \in \mathbb{N}$.
 $f(x)$ има локален максимум в т. x_0 , ако $\exists$ околност
 $U \subseteq M$ на x_0 , такава че $f(x_0) \geq f(x)$ за $\forall x \in U$.

• Локален минимум:

Нека $f(x)$ е дефинирана в околност M на т. $x_0 \in \mathbb{N}$.
 $f(x)$ има локален минимум в т. x_0 , ако $\exists$ околност
 $U \subseteq M$ на x_0 , такава че $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in U$.

• Локалните минимума и локалните максимуми събирателно
се наричат Локални екстремуми.

• Th (Ферма):

Нека $f(x)$ е дефинирана в околност на т. x_0 и
 $f(x)$ е диференцируема в x_0 . Ако $f(x)$ има локален
екстремум в т. x_0 , то $f'(x_0) = 0$.

• Th (Вайерштрас):

Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния
затворен интервал $[a, b]$. Тогава тя притежава
най-голема ст-ст и най-малка ст-ст сред стойности те си
за $x \in [a, b]$.

• Теорема на средните стойности (Фол, Лагранж и Коши):

Нека $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$
и притежава производна поне в отворения интервал (a, b) .

Да се док., че:

а) (Фол) ако $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b)$, такава че
 $f'(c) = 0$;

б) (Лагранж) $\exists c \in (a, b)$, т. че $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

в) (Коши) ако $g(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ и е диференци-
руема в (a, b) , $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, то $\exists c \in (a, b)$, т. че

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$



Imperial
Training Camp

a) (Пол) До-во:

Th
Вайерштрас

$f(x)$ е непрекъсната в $[a, b] \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x)$ притежава н.г. и н.м. ст-ти в $[a, b]$.

Нека $m = f(x_1)$ е н.м. ст-т на $f(x)$, $x_1 \in [a, b]$ и
 $M = f(x_2)$ е н.г. ст-т на $f(x)$, $x_2 \in [a, b]$.

* Ако $m = M$, от $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b] \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x)$ е константа в $[a, b] \Rightarrow f'(x) = 0, \forall x \in [a, b]$,
а $(a, b) \subset [a, b] \Rightarrow \underline{f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)}$ //

* Ако $m < M$.

Поне едната от точките x_1 и x_2 е вътрешна за интервала - в противен случай те ще имат ст-ти а и б и понеже (от усл.) $f(a) = f(b) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = m \\ f(x_2) = M \end{array} \right\} \Rightarrow m = M,$$

а този случай го разглеждахме по-горе.

• Ако $x_1 \in (a, b)$, тогава x_1 е лок. екстремум $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \underline{f'(x_1) = 0, \forall x_1 \in (a, b)} // (1)$

• Ако $x_1 = a$ или $x_1 = b$, то $x_2 \in (a, b)$
 $f(x_2)$ има лок. екстремум в x_2 } $\Rightarrow$ Th Ферма
 $\Rightarrow \underline{f'(x_2) = 0, \forall x_2 \in (a, b)} // (2)$

б) (Лагранж) До-во:

Ако $f(a) = f(b)$, ползваме теоремата на Рол, която е частен случай на теоремата на Лагранж.

Разглеждаме ф-цията $g(x) = f(x) - k \cdot x$,
където $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(b) - f(a) = k(b - a) \Leftrightarrow f(b) - kb = f(a) - ka \\ \text{(по деф.) } g(x) = f(x) - k \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(a) = g(b)$$

осл.) $g(x)$ е гдф. и непрекъсната в $[a, b]$ и $g(x)$ е диференцируема в (a, b) } $\Rightarrow$

th Pon

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b), \text{ т.е. } g'(c) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - \kappa \} \Rightarrow$$



Imperial
Training Camp

$$0 = f'(c) - \kappa \Leftrightarrow 0 = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a) //$$

б) (Коши) Д-во:

Теоремата на Лагранж е частен случай на теоремата на Коши, при нея $g(x) = x$.

• Допускаме, че $g(a) = g(b)$, тогава за $g(x)$ ще са изпълнени условията на теоремата на Рол $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists c \in (a, b), \text{ т.е. } g'(c) = 0$ } противоречие! $\Rightarrow$
 от усл. $\Rightarrow g'(c) \neq 0$
 $\Rightarrow g(a) \neq g(b)$.

• Разгн. ф-цията $\varphi(x) = f(x) - \kappa \cdot g(x)$, когато $\kappa = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) = \kappa (g(b) - g(a)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(b) - \kappa \cdot g(b) = f(a) - \kappa \cdot g(a) \} \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

$$\varphi(x) = f(x) - \kappa \cdot g(x)$$

th
Pon
 $\Rightarrow$

Освен това $\varphi(x)$ е деф. и непрек. в $[a, b]$ и е диференцируема в (a, b) .

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b), \text{ т.е. } \varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \kappa \cdot g'(c) = 0$$

$$f'(c) = \kappa \cdot g'(c) \mid \Rightarrow$$

$$g'(c) \neq 0$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\kappa = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} //$$



• Формула на Тейлър:

Нека $f(x)$ е дефинирана и $(n+1)$ пъти диференцируема в околност U на т. x_0 , $n \in \mathbb{N}$.

Тогав за всяка т. x от U и $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$ имаме, че $\exists$ то ~~сбв~~ м/у x и x_0 , такова че:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \cdot f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + R_n,$$

$$\text{където } R_n = \frac{(x-x_0)^p \cdot (x-t_0)^{n+1-p} \cdot f^{(n+1)}(t_0)}{p \cdot n!}.$$

До-во: $x \in U$, $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$ (фиксиране n).

Ако $x = x_0$
(но уст) t_0 е м/у x_0 и x $\Rightarrow t_0 = x = x_0 \Rightarrow$ очевидно

равенството е изпълнено

Нека за определеност $x_0 < x$.

$$\text{Разгр. ф-цията } \varphi(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{x-t}{1!} \cdot f'(t) + \dots + \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(t) \right) - \lambda \cdot (x-t)^p, \text{ където:}$$

$\varphi(t)$ е дефинирана за $t \in U$, а λ е параметър.

Ако е, че $\varphi(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Избираме λ , така че $\varphi(x_0) = 0$, т.е.:

$$f(x) - \left(f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) \right) - \lambda (x-x_0)^p = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{f(x) - \left[f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) \right]}{(x-x_0)^p} \quad (1)$$

Той като f е $(n+1)$ пъти диференцируема в U , то φ е диференцируема в U ($t \in U$)



Неносредствено пресметане:

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \varphi'(t) &= -\left(f'(t) + (-1)f'(t) + \frac{x-t}{1!} \cdot f''(t) + (-1)\frac{x-t}{1!} \cdot f''(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + (-1)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)\right) - (-1)2p(x-t)^{p-1} = \\
 &= 2p(x-t)^{p-1} - \frac{(x-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)
 \end{aligned}$$

$\varphi(t)$ е диференцируема, а следователно и непрекъсната в интервала $[x_0, x]$ $\Rightarrow \exists t_0 \in (x_0, x)$, такова че $\varphi'(t_0) = 0$, т.е.:

$$2p(x-t_0)^{p-1} - \frac{(x-t_0)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t_0) = 0$$

$$2p(x-t_0)^{p-1} = \frac{(x-t_0)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t_0)$$

$$\lambda = \frac{(x-t_0)^n \cdot f^{(n+1)}(t_0)}{p \cdot n! \cdot (x-t_0)^{n-p}} = \frac{(x-t_0)^{n+1-p} \cdot f^{(n+1)}(t_0)}{p \cdot n!} / (x-x_0)^p$$

$\lambda(x-x_0)^p = R_n$ и от горния вид на $\lambda(1)$ получаваме

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

R_n се нарича остатъчен член във формулата на Тейлър.

При $p = n+1$ получаваме форма на Лагранж за остатъчния член и тя е:

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t_0)}{(n+1)!}$$



(*) - как се счита го ТСК;
судебениуване $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \underbrace{f'(x)}_{=0} = \left[f'(t) + \left(\frac{x-t}{1!} f'(t) \right)' + \dots \right] \rightarrow (2(x-t)^p)' = \\ &= - \left[\cancel{f'(t)} + \left((-1) \cancel{f'(t)} + \frac{x-t}{1!} \cdot \cancel{f''(t)} \right) + \left((-1) \frac{2(x-t)}{2! \cdot 1!} \cancel{f''(t)} + \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{n(x-t)^{n-1} \cdot (-1)}{n! \cdot (n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right) \right] \rightarrow (-1) 2p(x-t)^{p-1} \\ &= - \left(\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right) + 2p(x-t)^{p-1} \Leftrightarrow 2p(x-t)^{p-1} = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \end{aligned}$$

• $[h(g(x))]' = h'(g(x)) \cdot g'(x)$