

1. Булеви функции. Теорема на Пост-Яблонски за пълнота.

Нека $\mathbf{J}_2 = \{0, 1\}$. Всяка функция $f : \mathbf{J}_2^n \rightarrow \mathbf{J}_2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ наричаме

двоична (булева) функция.

Всяка функция $f : \mathbf{J}_2^n \rightarrow \mathbf{J}_2$ можем да разглеждаме като функция на n независими променливи $x_1, x_2, \dots, x_n$.

С $\mathbf{F}_2^n$ ще означаваме множеството на всички двоични функции на n променливи. Очевидно е, че $|\mathbf{F}_2^n| = 2^{2^n}$.

Означаваме $\mathbf{F}_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_2^n$ - множеството на всички двоични функции.

Въвеждаме стандартна (лексикографска) наредба на $\mathbf{J}_2^n$:

$\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ предшества $\beta = b_1 b_2 \dots b_n$, ако съществува

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$, такова че $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{i-1} = b_{i-1}$,

$a_i < b_i$ ($a_i = 0, b_i = 1$). При стандартно подредени вектори от $\mathbf{J}_2^n$

всяка булева функция се задава еднозначно с двоичен

вектор-стълб с размерност 2^n . Това означава, че i -тата компонента на вектора-стълб е стойността на функцията за i -тия вектор от $\mathbf{J}_2^n$ в стандартната наредба.

Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{F}_2^n$, $g_i(y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{F}_2^m$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Функцията $h(y_1, y_2, \dots, y_m) = f(g_1(y_1, \dots, y_m), g_2(y_1, \dots, y_m), \dots, g_n(y_1, \dots, y_m))$ наричаме **суперпозиция** на $g_1, g_2, \dots, g_n$ във f .

Казваме, че функцията $f : \mathbf{J}_2^n \rightarrow \mathbf{J}_2$ **не зависи съществено** от променливата x_i , ако $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Още казваме, че x_i е **фиктивна променлива**.

Ясно е, че към всяка двоична функция на n променливи можем да добавим колкото искаме фиктивни променливи. Така можем да считаме, че суперпозицията на $g_1, g_2, \dots, g_n$ във f е дефинирана дори когато $g_1, g_2, \dots, g_n$ са функции на различен брой променливи.

Нека $F = \{f_0, f_1, \dots\} \subseteq \mathbf{F}_2$. Нека $X = \{f, x, 0, 1, (,), <\text{запетая}>\}$.

По-нататък ще записваме думите $f\alpha, x\beta$, където $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^+$ като f_i, x_j , където α е двоичното представяне на числото i , β е двоичното представяне на числото j . Дефинираме индуктивно понятието

формула над множеството от функции F :

База: За всяка функция $f_i \in F$ на n променливи думата

$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^*$ е формула над F .

Предположение: Нека $f_i \in F$ е функция на n променливи и

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in X^*$ са формули над F или променливи, т.е. от вида x_k .

Стъпка: Тогава думата $f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \in X^*$ е формула над F .

Функция от вида $f(x_1, \dots, x_n) = x_k$ наричаме **идентитет**.

Нека $F = \{f_0, f_1, \dots\} \subseteq \mathbf{F}_2$. На всяка формула φ над F съпоставяме функция $f \in \mathbf{F}_2$ по следния начин:

База: Ако $\varphi = f_i(x_1, \dots, x_n)$, то определяме $f = f_i \in F$.

Предположение: Нека $f_i \in F$ е функция на n променливи и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ са формули или променливи и съответните им функции са $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathbf{F}_2$. Ако φ_j е променливата x_k , то съответната функция g_j е идентитетът x_k .

Стъпка: Тогава на формулата $\varphi = f_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ съпоставяме суперпозицията $f = f_i(g_1, \dots, g_n)$.

$S[F]$ ще означаваме множеството от всички двоични функции, съпоставени на формулите над F и ще го наричаме **затваряне** на F (относно суперпозицията).

Множеството от функции $F \subseteq \mathbf{F}_2$ е **пълно** в $\mathbf{F}_2$, ако $S[F] = \mathbf{F}_2$.

Очевидно е, че $S[\mathbf{F}_2] = \mathbf{F}_2$, но съществуването на пълни множества, различни от $\mathbf{F}_2$ не е очевидно.

Нека $F \subseteq \mathbf{F}_2$. Казваме, че F е **базис**, ако:

1. F е пълно, т.е. $S[F] = \mathbf{F}_2$.
2. F е минимално по включване с това свойство, т.е.
 $G \subset F \rightarrow [G] \neq \mathbf{F}_2$.

Дефинираме двоична функция $f(x, \sigma) = x^\sigma$ по следния начин:

$x^\sigma = x$, ако $\sigma = 1$ и $x^\sigma = \bar{x}$, ако $\sigma = 0$.

Лема: $0^\sigma = \bar{\sigma}$, $1^\sigma = \sigma$.

Формули от вида $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$, където $x_{i_j} \neq x_{i_s}$ при $j \neq s$, $\sigma_j \in \{0, 1\}$, наричаме **елементарни конюнкции**.

Теорема (Бул): Множеството $\{x \vee y, xy, \bar{x}\}$ е пълно.

Доказателство: Ако $f = \bar{0}$, можем да представим $f = x\bar{x}$ и тогава $f \in \{x \vee y, xy, \bar{x}\}$.

Нека $f \neq \bar{0}$. Тогава $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \in \mathbf{J}_2^n \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$, което е

формула над $\{x \vee y, xy, \bar{x}\}$.

В означенията на доказателството, когато $f \neq \bar{0}$, формулата се нарича **съвършена дизюнктивна нормална форма** на f .

Теорема: Нека $F \subseteq \mathbf{F}_2$ е пълно множество, $G \subseteq \mathbf{F}_2$ и за всяка функция $f \in F$ имаме $f \in [G]$. Тогава G е пълно множество.

Следствие: $\{xy, \bar{x}\}$ е пълно, $\{x \vee y, \bar{x}\}$ е пълно,
 $\{\tilde{0}, \tilde{1}, xy, x \oplus y\}$ е пълно.

Доказателство: От теоремата на Бул и законите на Де Морган
 $x \vee y = \overline{\overline{x} \bar{y}}$, $xy = \overline{\overline{x} \vee \bar{y}}$ и от $\bar{x} = x \oplus \tilde{1}$.

Да се спрем на последното пълно множество от следствието.

Нека $f \in \mathbf{F}_2$. Тогава f има формула над $\{\tilde{0}, \tilde{1}, xy, x \oplus y\}$.

Разкриваме скобите във формулата, като прилагаме дистрибутивния закон на конюнкцията спрямо събирането по модул 2, използваме идемпотентността на умножението ($xx = x$) и факта, че $f \oplus f = \tilde{0}$. Накрая получаваме многократна сума по модул 2 от елементарни конюнкции без отрицания, като една елементарна конюнкция участва най-много веднъж. При това, от аналогията на конюнкцията с умножението по модул 2, получената формула може да разглеждаме като полином над полето $GF(2)$ (полето с два елемента). Наричаме я **полином на Жегалкин**.

Теорема: Всяка булева функция има и то единствен полином на Жегалкин.

Доказателство: Всяка функция има полином, различните функции имат различни полиноми и броят на полиномите е $2^{2^n} = |\mathbf{F}_2^n|$.

Казваме, че множеството $F \subseteq \mathbf{F}_2$ е **затворено**, ако $[F] = F$.

Например $\mathbf{F}_2$ е затворено, тъй като $[\mathbf{F}_2] = \mathbf{F}_2$.

Множествата $\{\tilde{0}\}$, $\{\tilde{1}\}$, $\{x, \bar{x}\}$ също са затворени.

Теорема (критерий за затвореност): Нека $F \subseteq \mathbf{F}_2$ е такава, че

1. $f(x) = x \in F$;
2. за всяка функция $f(x_1, \dots, x_n) \in F$ и $g_1, \dots, g_n \in F$ имаме $h = f(g_1, \dots, g_n) \in F$.

Тогава F е затворено множество.

Казваме, че функцията $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}_2$ **запазва нулата**, ако $f(0, \dots, 0) = 0$. Казваме, че функцията $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}_2$ **запазва единицата**, ако $f(1, \dots, 1) = 1$.

Означаваме с $\mathbf{T}_0$ множеството от всички булеви функции, които запазват нулата. Тези от тях които са на n променливи означаваме с $\mathbf{T}_0^n$. Означаваме с $\mathbf{T}_1$ множеството от всички булеви функции, които запазват единицата и с $\mathbf{T}_1^n$ тези от тях, които са на n променливи.

Например $xy \in \mathbf{T}_0$, $x \vee y \in \mathbf{T}_0$, $xy \in \mathbf{T}_1$, $x \vee y \in \mathbf{T}_1$, $x \in \mathbf{T}_0$, $x \in \mathbf{T}_1$,
 $\bar{x} \notin \mathbf{T}_0$, $\bar{x} \notin \mathbf{T}_1$, $x \oplus y \in \mathbf{T}_0$, $x \oplus y \notin \mathbf{T}_1$.

Така $\mathbf{T}_0 \neq \mathbf{F}_2$ и $\mathbf{T}_1 \neq \mathbf{F}_2$.

Очевидно, $|\mathbf{T}_0^n| = 2^{2^n-1} = |\mathbf{T}_1^n|$, тъй като всяка функция запазваща коя да е от константите се дефинира по произволен начин върху всички вектори освен един.

Теорема: Множествата $\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{T}_1$ са затворени множества от булеви функции.

Доказателство: Директно от критерия за затвореност.

Нека $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}_2$. Функцията $f^*(x_1, \dots, x_n)$, определена по следния начин: за всеки вектор $a_1 \dots a_n \in \mathbf{J}_2^n$,

$f^*(a_1, \dots, a_n) = \overline{f(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})}$ наричаме **двойнствена** на f .

Векторите $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n \in \mathbf{J}_2^n$ и $\overline{\alpha} = \overline{a_1} \overline{a_2} \dots \overline{a_n} \in \mathbf{J}_2^n$ наричаме **противоположни вектори**.

Лема: В стандартната наредба на $\mathbf{J}_2^n$, противоположните вектори са симетрично разположени относно средата на таблицата.

От тази лема получаваме следният алгоритъм за намиране на двойнствена функция, зададена със своя вектор-стълб:

1. инвертираме всяка стойност в стълба;
2. завъртаме симетрично стълба около средата.

Като непосредствено следствие от алгоритъма получаваме: за всяка функция $f \in \mathbf{F}_2$, $(f^*)^* = f$.

С прилагане на алгоритъма можем да установим следните двойнствености: $(\tilde{0})^* = \tilde{1}$, $(x)^* = x$, $(\overline{x})^* = \overline{x}$, $(xy)^* = x \vee y$.

Лема (двойнственост на сложна функция):

Ако $h = f(g_1, \dots, g_n)$, то $h^* = f^*(g_1^*, \dots, g_n^*)$.

Функцията $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}_2$ наричаме **самодвойнствена**, ако $f^* = f$. Със $\mathbf{S}$ означаваме множеството от всички самодвойнствени функции, със $\mathbf{S}^n$ тези от тях, които са на n променливи.

Например x , $\overline{x}$ са самодвойнствени, xy не е самодвойнствена. Така $\mathbf{S} \neq \mathbf{F}_2$.

Лема: Функцията f на n променливи е самодвойнствена $\Leftrightarrow$ за всеки вектор $\alpha \in \mathbf{J}_2^n$ е в сила $f(\alpha) \neq f(\overline{\alpha})$.

Вече е ясно, че $|\mathbf{S}^n| = 2^{2^n-1}$, тъй като всяка самодвойнствена функция на n променливи се дефинира свободно точно върху един от всяка двойка противоположни вектори.

Теорема: Множеството **S** е затворено множество от булеви функции.

Доказателство: Прилагаме критерия за затвореност, като използваме лемата за двойственост на сложна функция.

Въвеждаме нова релация $\sqsubseteq$ в $\mathbf{J}_2^n$:

ако $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ и $\beta = b_1 b_2 \dots b_n$, то $\alpha \sqsubseteq \beta \Leftrightarrow a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$.

Релацията $\sqsubseteq$ очевидно е частична наредба, която не е линейна.

Въвеждаме релация $\sqsubset$ в $\mathbf{J}_2^n$:

ако $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ и $\beta = b_1 b_2 \dots b_n$, $\alpha \sqsubset \beta \Leftrightarrow$ съществува

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$, такова че $a_i < b_i$ ($a_i = 0, b_i = 1$) и $a_j = b_j$ при $j \neq i$.

Лема: Ако $\alpha \sqsubseteq \beta$ и $\alpha \neq \beta$, то съществуват $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{J}_2^n$,

такива че $\alpha \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \dots \sqsubset \alpha_k \sqsubset \beta$ (допускаме $k = 0$).

Казваме, че функцията $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}_2$ е **монотонна**, ако за всеки $\alpha, \beta \in \mathbf{J}_2^n$, такива че $\alpha \sqsubseteq \beta$ имаме $f(\alpha) \leq f(\beta)$.

С **M** означаваме множеството от всички монотонни функции, с **M_n** тези от тях, които са на n променливи.

Функциите $x, xy, x \vee y, \bar{0}, \bar{1}$ са монотонни, докато $\bar{x}$ не е монотонна, тъй като $0 \sqsubseteq 1$, но $1 = \bar{0} > \bar{1} = 0$.

Така **M** $\neq$ **F₂**.

Задачата за намиране на явна формула за броя на монотонните функции на n променливи не е решена.

Лема: Нека $f \notin \mathbf{M}$. Тогава съществуват $\alpha, \beta \in \mathbf{J}_2^n$, такива че $\alpha \sqsubset \beta$ и $f(\alpha) > f(\beta)$.

Доказателство: Тъй като $f \notin \mathbf{M}$, то съществуват $\alpha \sqsubseteq \beta$, $\alpha \neq \beta$, такива че $f(\alpha) > f(\beta)$, т.е. $f(\alpha) = 1, f(\beta) = 0$. От горната лема съществуват $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{J}_2^n$, такива че $\alpha \sqsubset \alpha_1 \sqsubset \dots \sqsubset \alpha_k \sqsubset \beta$. Да означим $\alpha_0 = \alpha, \alpha_{k+1} = \beta$. Да допуснем, че за всяко $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ имаме $f(\alpha_i) \leq f(\alpha_{i+1})$.

Тогава $1 = f(\alpha_0) \leq f(\alpha_1) \leq \dots \leq f(\alpha_k) \leq f(\alpha_{k+1}) = 0$ – противоречие.

Така съществува индекс i , такъв че $f(\alpha_i) > f(\alpha_{i+1})$ и $\alpha_i \sqsubset \alpha_{i+1}$.

Теорема: Множеството **M** е затворено множество от булеви функции.

Доказателство: Прилагаме критерия за затвореност.

Всяка функция $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}$ с полином на Жегалкин от вида $a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n$, наричаме **линейна функция**.

С **L** означаваме множеството от всички линейни функции, с **L_n** тези от тях, които са на n променливи.

Например $x, \bar{x} = x \oplus \bar{1} \in \mathbf{L}$, но $xy \notin \mathbf{L}$, $x \vee y = x \oplus y \oplus xy \notin \mathbf{L}$.

Така $\mathbf{L} \neq \mathbf{F}_2$.

Очевидно $|\mathbf{L}_n| = 2^{n+1}$, тъй като в общия вид линейните полиноми на Жегалкин имат $n+1$ свободни коефициенти.

Теорема: Множеството $\mathbf{L}$ е затворено множество от булеви функции.

Доказателство: Използваме критерия за затвореност.

Теорема (Пост-Яблонски): Нека $F \subseteq \mathbf{F}_2$. Тогава F е пълно $\Leftrightarrow F$ не е подмножество на нито едно от множествата $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{L}$.

Доказателство:

Нека F е пълно и $K \in \{\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{L}\}$. Да допуснем, че $F \subseteq K$.

Тогава $[F] \subseteq [K]$. От пълнотата на F имаме $[F] = \mathbf{F}_2 \rightarrow [K] = \mathbf{F}_2$.

От друга страна за множеството K вече показахме, че $[K] = K \neq \mathbf{F}_2$ – противоречие. Така F не е подмножество на нито едно от множествата $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{L}$.

Нека F не е подмножество на нито едно от множествата

$\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{L}$. Тогава съществуват функции $f_0, f_1, f_s, f_m, f_l \in F$,

не непременно различни, такива че $f_0 \notin \mathbf{T}_0, f_1 \notin \mathbf{T}_1, f_s \notin \mathbf{S}$,

$f_m \notin \mathbf{M}, f_l \notin \mathbf{L}$. Да означим $F' = \{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}$, $F' \subseteq F$.

Ще покажем, че $x, \bar{x} \in [F']$.

Функцията $g_0(x) = f_0(x, x, \dots, x) \in [F']$, тъй като във функцията f_0 сме заместили променливи. Имаме $g_0(0) = f_0(0, 0, \dots, 0) = 1$, тъй като $f_0 \notin \mathbf{T}_0$. Функцията $g_1(x) = f_1(x, x, \dots, x) \in [F']$, тъй като във функцията f_1 сме заместили променливи.

Имаме $g_1(1) = f_1(1, 1, \dots, 1) = 0$, тъй като $f_1 \notin \mathbf{T}_1$.

За $g_0(1)$ и $g_1(0)$ имаме четири възможности:

1. $g_0(1) = 0$ и $g_1(0) = 0$ – тогава $g_0(x) = \bar{x}$, $g_1(x) = \bar{0}$ и така $\bar{0} \in [F']$ и $g_0(g_1(x)) = \bar{1} \in [F']$;
2. $g_0(1) = 0$ и $g_1(0) = 1$ – тогава $g_0(x) = \bar{x}$ и $g_1(x) = \bar{x}$ и така $\bar{x} \in [F']$;
3. $g_0(1) = 1$ и $g_1(0) = 0$ – тогава $g_0(x) = \bar{1}$ и $g_1(x) = \bar{0}$ и така $\bar{0} \in [F']$, $\bar{1} \in [F']$;
4. $g_0(1) = 1$ и $g_1(0) = 1$ – тогава $g_0(x) = \bar{1}$ и $g_1(x) = \bar{x}$ и така $g_1(g_0(x)) = \bar{0} \in [F']$ и $\bar{1} \in [F']$.

Така в три от случаите получихме двете константи.

Да разгледаме втория случай, при който получихме само отрицанието.

Функцията $f_s \notin \mathbf{S} \rightarrow$ съществува $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n \in \mathbf{J}_2^n$, така че

$f_s(\alpha) = f_s(\bar{\alpha})$. Функцията $g_s(x) = f_s(x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_n}) \in [F']$:

ако $a_i = 1$, то $x^{a_i} = x$ и замествахме само променлива,

ако $a_i = 0$, то $x^{a_i} = \bar{x}$, но в този случай $\bar{x} \in [F']$ и замествахме променлива с формула над F' , така че отново получаваме формула над F' .

Имаме $g_s(0) = f_s(0^{a_1}, 0^{a_2}, \dots, 0^{a_n}) = f_s(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = f_s(\bar{\alpha})$,

$$g_s(1) = f_s(1^{a_1}, 1^{a_2}, \dots, 1^{a_n}) = f_s(a_1, a_2, \dots, a_n) = f_s(\alpha).$$

Така $g_s(0) = g_s(1)$.

Ако $g_s(0) = g_s(1) = 0$, то $g_s(x) = \tilde{0} \in [F']$ и $g_1(g_s(x)) = \tilde{1} \in [F']$.

Ако $g_s(0) = g_s(1) = 1$, то $g_s(x) = \tilde{1} \in [F']$ и $g_1(g_s(x)) = \tilde{0} \in [F']$.

Така с формули над $\{f_0, f_1, f_s\}$ построихме константите $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ във всички случаи.

Функцията $f_m \notin \mathbf{M}$ и тогава от лемата по-горе съществуват вектори $\alpha, \beta \in \mathbf{J_2^n}$, такива че $\alpha \sqcup \beta$ и $f_m(\alpha) = 1, f_m(\beta) =$

0. Нека $\alpha = a_1 \dots a_{i-1} 0 a_{i+1} \dots a_n, \beta = a_1 \dots a_{i-1} 1 a_{i+1} \dots a_n$.

Функцията $g_m(x) = f_m(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) \in [F']$, тъй като

заместваме променливи с вече получените формули $\tilde{0}, \tilde{1}$ над F' .

Имаме $g_m(0) = f_m(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) = f_m(\alpha) = 1$,

$g_m(1) = f_m(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n) = f_m(\beta) = 0$.

Така $g_m(x) = \bar{x} \in [F']$.

Нека $x_1 x_2 \dots x_k$ ($k \geq 0$) е най-късият нелинеен член в полинома на Жегалкин за функцията f_l . Такъв има, тъй като $f_l \notin \mathbf{L}$. Във

формулата за f_l заместваме променливите $z_1, \dots, z_k$ с вече

получената формула $\tilde{1}$ над F' и всички останали променливи без

x и y с вече получената формула $\tilde{0}$ над F' . Така получаваме

функция $g_l(x, y) \in [F']$. Полиномът на Жегалкин за $g_l(x, y)$ има вида

$g_l(x, y) = xy \oplus ax \oplus by \oplus c$, тъй като всички останали нелинейни

членове съдържат поне една променлива, различна от

$x, y, z_1, \dots, z_k$ и се анулират. Да направим следната смяна на

променливите: $x = u \oplus b, y = v \oplus a$. Тя е позволена:

ако $b = 0$, то $u \oplus b = u$ и заместваме само променлива,

ако $b = 1$, то $u \oplus b = \bar{u} \in [F']$ и заместваме променлива с формула над F' , така че отново получаваме формула над F' .

Така получаваме функция

$$h_l(u, v) = (u \oplus b)(v \oplus a) \oplus a(u \oplus b) \oplus b(v \oplus a) \oplus c = uv \oplus d,$$

където $d = ab \oplus c$.

Ако $d = 0$, то $h_l(u, v) = uv$,

ако $d = 1$, то $h_l(u, v) = \overline{uv}$ и $g_m(h_l(u, v)) = uv$.

Получихме, че конюнкцията е формула над F' .

Така $\{xy, \bar{x}\} \subseteq [F'] \subseteq [F]$ и $\{xy, \bar{x}\}$ е пълно множество и от една теорема за пълни множества $\rightarrow F$ е пълно множество.

Казваме, че функцията $f \in \mathbf{F_2}$ е **Шеферова**, ако $[\{f\}] = \mathbf{F_2}$.

Съгласно теоремата на Пост-Яблонски f е Шеферова $\Leftrightarrow$

$f \notin \mathbf{T_0}, f \notin \mathbf{T_1}, f \notin \mathbf{S}, f \notin \mathbf{M}, f \notin \mathbf{L}$. Ще покажем едно достатъчно условие за Шеферовост.

Теорема: Нека $f \in \mathbf{F_2}$ и $f \notin \mathbf{T_0}, f \notin \mathbf{T_1}, f \notin \mathbf{S}$. Тогава f е Шеферова.

Доказателство:

Ще покажем, че $f \notin \mathbf{M}$ и $f \notin \mathbf{L}$ и тогава от теоремата на Пост-Яблонски функцията f е Шеферова.

Тъй като $f \notin \mathbf{T_0}$, то $f(0, 0, \dots, 0) = 1$.

Също от $f \notin \mathbf{T_1} \Rightarrow f(1, 1, \dots, 1) = 0$.

Но $(0, 0, \dots, 0) \sqcup (1, 1, \dots, 1)$ и $f(0, 0, \dots, 0) > f(1, 1, \dots, 1)$,

така че $f \notin \mathbf{M}$.

Да допуснем, че $f \in \mathbf{L}$, т.е. $f = a_0 \oplus x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \dots \oplus x_{i_k}$.

От $f \notin \mathbf{T_0} \Rightarrow f(0, \dots, 0) = 1$, т.е. $a_0 = 1$. От $f \notin \mathbf{T_1} \Rightarrow f(1, 1, \dots, 1) = 0$,

т.е. $\underbrace{1 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1}_{k+1 \text{ пъти}} = 0 \Rightarrow k$ е нечетно. Сега

$$f^* = 1 \oplus (x_{i_1} \oplus 1) \oplus \dots \oplus (x_{i_k} \oplus 1) \oplus 1 = \underbrace{1 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1}_{k+2 \text{ пъти}} \oplus x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_k} =$$

$$= 1 \oplus x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_k} = f \Rightarrow f \in \mathbf{S} - \text{противоречие. Така } f \notin \mathbf{L}.$$

