Лекция 2

Хомогенни системи и подпространства на F^n. Теорема на Руше и решения на нехомогенна система

1. Пространството от решения на хомогенна система

Да разгледаме една линейна хомогенната система уравнения, с коефициенти от полето F:

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right. .$$

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$ е матрицата на системата и стълбовете на матрицата A са:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{s1} \end{pmatrix},\ \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \dots,\ \mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Твърдение 2.1. *Решението на всяка линейна хомогенна система с n неизвестни и коефициенти от полето F е линейно подпространство на n-мерното векторно пространството F^n.*

Доказателство. Нека да бележим с L множеството от решенията на системата. Множеството L винаги има поне един елемент и това е нулевото решение $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Векторът $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ е решението на системата (1), тогава и само тогава, когато за всеки индекс i е изпълнено $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = 0$. Като обединим тези равенства, ще получим следната зависимост за стълбовете на матрицата на системата:

$$\beta_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{s1} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{s2} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{sn} \end{pmatrix} = \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \cdots + \beta_n c_n = \mathbf{0}.$$

Нека $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ и $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ са решения на системата (1), тогава за λ и μ - произволни елементи от полето F е изпълнено:

$$(\lambda.\beta_1 + \mu.\gamma_1)c_1 + \cdots + (\lambda.\beta_n + \mu.\gamma_n)c_n = \lambda(\beta_1 c_1 + \cdots + \beta_n c_n) + \mu(\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_n c_n) = \mathbf{0},$$

следователно $\lambda.\beta + \mu.\gamma$ е също решение на системата (1). По този начин се получава, че множеството от решения е подпространство. □

Дефиниция 2.2. *Базис на пространството от решения на една хомогенна система линейни уравнения се нарича фундаментална система от решения на линейната система.*

Ясно е, че ако една хомогенна система има ненулево решение, тогава нейното подпространство от решения има базис и следователно за тази система съществува фундаментална система от решения.

ТЕОРЕМА 2.3. *Размерността на подпространството от решения на хомогенната система*

$$(1)\quad \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

е равна на $n - r$, където $r = r(A)$ е рангът на матрицата на системата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}.$$

Доказателство. Да бележим с L пространството от решенията на системата и нека рангът на матрицата A е $r = r(A)$. Следователно тя има r линейно независими реда и всеки друг ред е тяхна линейна комбинация. Това означава, че съществуват r линейно независими уравнения и можем да считаме, че това са първите r уравнения:

$$(2)\quad \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0 \end{array} \right. .$$

Системите (1) и (2) имат едни и същи рещения, т.е. те са еквивалентни.
Матрицата A има ранг r, колкото е и рангът на матрицата на системата (2). Нека индексите на r линейно независими стълба са $i_1, i_2, \dots, i_r$, а останалите индекси на стълбове са $j_1, j_2, \dots, j_{n-r}$. Изпълнено е $\{i_1, \dots, i_r\} \cup \{j_1, \dots, j_{n-r}\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Подматрицата

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & \dots & a_{1,i_r} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \dots & a_{2,i_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,i_1} & a_{r,i_2} & \dots & a_{r,i_r} \end{pmatrix}$$

има линейно независими стълбове, следователно B е $r \times r$ матрица с ранг r. От Следствие 1.15 имаме, че само с елементарни преобразувания по редове матрицата B може да се преобразува до единична матрица. Ако приложим тези преобразувания към матрицата на системата (2), ще получим, че тази система се преобразува до следната система:

$$(3)\quad \left| \begin{array}{l} x_{i_1} + a'_{1j_1}x_{j_1} + a'_{1j_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{1j_{n-r}}x_{j_{n-r}} = 0 \\ x_{i_2} + a'_{2j_1}x_{j_1} + a'_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{2j_{n-r}}x_{j_{n-r}} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{i_r} + a'_{rj_1}x_{j_1} + a'_{rj_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{rj_{n-r}}x_{j_{n-r}} = 0 \end{array} \right. .$$

Построяваме решения на системата (2), като на неизвестните $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-r}}$ задаваме стойности, които съответстват на векторите от стандартния базис на F^{n-r}. За $1 \le s \le n - r$ получаваме векторите $\beta^s = (\beta^s_1, \beta^s_2, \dots, \beta^s_n)$, които имат следните координатите:

$$\beta^s_t = \begin{cases} 0 & \text{когато } t = j_p \text{ и } p \neq s, \\ 1 & \text{когато } t = j_s, \\ -a'_{k,j_s} & \text{когато } t = i_k. \end{cases}$$

Ясно е, че векторите β^s, за $s = 1, \dots, n-r$, са линейно независими и са решения на системата, т.е. $\beta^s \in L$. Следователно линейната обвивка $l(\beta^1, \dots, \beta^{n-r})$ се съдържа в пространството от решения L.
Нека е $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in L$ е едно произволно решение на системата. Разглеждаме вектора

$$\alpha = \gamma - \gamma_{j1}\beta^1 - \gamma_{j2}\beta^2 - \dots - \gamma_{j_{n-r}}\beta^{n-r} \in F^n.$$

Векторът α е решение на системата, защото е линейна комбинация на решения. Координатата $\alpha_{j_s} = \gamma_{j_s} - \gamma_{j_s}.\beta^s_{j_s} = 0$ за $s = 1, \dots, n-r$. Векторът α е решение на системата и следователно е решение и на всяко уравнение от системата (3). По този начин получаваме, че $\alpha_{i_t} = 0$, за $t = 1, \dots, r$, следователно всички координати на вектора α са 0. По този начин получаваме:

$$\alpha = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \gamma_{j1}\beta^1 + \gamma_{j2}\beta^2 + \dots + \gamma_{j_{n-r}}\beta^{n-r} \in l(\beta^1, \dots, \beta^{n-r}).$$

Това означава, че пространството L се съдържа в линейната обвивка, следователно решението е $L = l(\beta^1, \dots, \beta^{n-r})$. От това получаваме, че

$$\dim L = \dim l(\beta^1, \dots, \beta^{n-r}) = n - r. \qquad \square$$

2. Подпространства на F^n и хомогенни системи уравнения

ТЕОРЕМА 2.4. *Всяко подпространство на n-мерното векторно пространство F^n е решение на хомогенна система линейни уравнения.*

Доказателство. Нека U е произволно подпространство на F^n.
Ако U е нулевото пространство, тогава то е решение на следната система:

$$U : \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \dots\dots \\ x_n = 0 \end{array} \right. .$$

Ако U не е нулевото пространство и нека $\dim U = k$ и $a_1, a_2, \dots, a_k$ е базис на пространството U. Нека

$$\begin{array}{c} a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ a_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) \end{array} .$$

Разглеждаме следната хомогенна система уравнения:

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \dots + a_{kn}y_n = 0 \end{array} \right. .$$

Матрицата на тази система се състои от k линейто независими реда и има ранг k. Следователно пространството W от решения на системата (4) има размерност $t = n - k$. Нека $\beta_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1n}), \dots, \beta_t = (\beta_{t1}, \beta_{t2}, \dots, \beta_{tn})$ са базис на пространството W от решения на системата (4). Тогава разглеждаме системата:

$$(5) \quad \left| \begin{array}{l} \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \dots + \beta_{1n}x_n = 0 \\ \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \dots + \beta_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_{t1}x_1 + \beta_{t2}x_2 + \dots + \beta_{tn}x_n = 0 \end{array} \right. .$$

Рангът на матрицата на тази система е t, следователно размерността на решението на (5) е равна $k = n - t$.

За произволно $d \in \{1, \ldots, t\}$ е изпълнено, че векторът β_d е решение на системата (4), следователно за всяко $p \in \{1, \ldots, k\}$ имаме:

$$\beta_{d1}a_{p1} + \beta_{d2}a_{p2} + \cdots + \beta_{dn}a_{pn} = 0.$$

Това равенство задава, че векторът a_p е решение на d-тото уравнение от системата (5). Следователно всеки вектор от базиса $a_1, \ldots, a_k$ на пространството U е решение на системата (5). Размерността на решението на системата (5) е k, следователно решението съвпада с пространството U. □

3. Теорема на Руше и решения на нехомогенни системи

Нека разгледаме една линейна система с коефициенти от поле F.

$$(6)\quad \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{array} \right. .$$

Матрицата $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} \end{pmatrix}$ се нарича матрица на системата, а разширена матрица на системата е $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2h} & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sn} & b_s \end{array} \right)$.

Теорема 2.5. **Теорема на Руше**
Една система линейни уравнения има решение тогава и само тогава, когато рангът на матрицата на системата съвпада с ранга на разширената матрица, т.е. $r(A) = r(\bar{A})$.

Доказателство. Нека стълбовете на матрицата на система(6) и стълба от свободните членове са съответно:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \ldots, \ \mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}.$$

Ако системата (6) има решение $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, тогава е изпълнено:

$$\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \cdots + \beta_n c_n = b,$$

следователно стълбът b е линейна комбинация на стълбовете $c_1, c_2, \ldots, c_n$. По този начин получаваме, че $l(c_1, c_2, \ldots, c_n) = l(c_1, c_2, \ldots, c_n, b)$ и $r(c_1, c_2, \ldots, c_n) = r(c_1, c_2, \ldots, c_n, b)$, което означава, че $r(A) = r(\bar{A})$.
Ако е изпълнено, че $r(A) = r(\bar{A})$, тогава $r(c_1, c_2, \ldots, c_n) = r(c_1, c_2, \ldots, c_n, b)$, откъдето следва, че $l(c_1, c_2, \ldots, c_n) = l(c_1, c_2, \ldots, c_n, b)$. По този начин се получава, че $b \in l(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ и съществуват коефициенти $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ от полето F, за които е изпълнено

$$\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \cdots + \beta_n c_n = b.$$

Следователно $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ е решение на системата. □

Твърдение 2.6. *Нека (6) е една линейна система, а (7) съответната ѝ хомогенна система:*

$$(6)\quad \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{array} \right. \qquad (7)\quad \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Тогава са изпълнени следните свойства:

а) Ако $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *и* $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ *са решения на нехомогенната система (6), тогава тяхната разлика*

$$\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$$

е решение на хомогенната система (7);

б) Ако $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *е решение на система (6) и* $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ *е решение на хомогенната система (7), тогава тяхната сума*

$$\alpha + \gamma = (\alpha_1 + \gamma_1, \dots, \alpha_n + \gamma_n)$$

е решение на системата (6);

в) Ако системата (6) е съвместима и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *е едно нейно решение, тогава всяко решение на тази система е от вида*

$$\alpha + \gamma = (\alpha_1 + \gamma_1, \dots, \alpha_n + \gamma_n),$$

където $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ *е произволно решение на хомогенната система (7).*

Доказателство. а) Да заместим решенията $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ на нехомогенната система (6) в уравнение с номер i и да извадим двете равенства:

$$\begin{array}{c} a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_i \\ a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = b_i \end{array} \Rightarrow a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + \cdots + a_{1n}(\alpha_n - \beta_n) = 0.$$

По този начин получаваме, че разликата $\alpha - \beta$ е решение на хомогенната система (6).

б) Твърдението се получава, когато заместим с решението $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в i-тото уравнение на система(6) и с решението $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ в i-тото уравнение на система (7) и съберем двете равенства:

$$\begin{array}{c} a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_i \\ a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \cdots + a_{in}\gamma_n = 0 \end{array} \Rightarrow a_{i1}(\alpha_1 + \gamma_1) + \cdots + a_{1n}(\alpha_n + \gamma_n) = b_i.$$

в) Нека $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ е едно фиксирано решение на система (6) и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ е друго решение на тази система. От т.а), получихме че $\gamma = \alpha - \beta$ е решение на система (7), следователно $\beta = \alpha + \gamma$. □

Следствие 2.7. *Една линейна система с* n *неизвестни има единствено решение точно когато* $n = r(A) = r(\bar{A})$.

Доказателство За да има решение системата трябва да изпълнява $r(A) = r(\bar{A})$. Но когато $n = r(A)$ решението на съответната хомогенна система има размерност $0 = n - r$ и следователно хомогенната система има единствено нулевото решение, откъдето получаваме, че и решението на изходната система също е единствено. □

Непосредствено от Теорема 2.3 и Твърдение 2.6 получаваме:

Следствие 2.8. *Ако една линейна система с* n *неизвестни е съвместима, тогава решението ѝ може да се изрази с* $n - r(A)$ *параметъра.*