Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснати функции. Теорема на Нютон-Лайбниц.

Фиксирана е функцията $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Под разбиване на интервала $[a,b]$ разбираме редицата от точки $x_0=a, x_1, \dots, x_n=b$, такива че $x_0<x_1<x_2<\dots<x_n$. Под диаметър на разбиването разбираме числото $d(\{x_i\}) = \max\limits_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$, т.е. дължината на най-големия подинтервал, определен от разбиването. Сумата $\sigma(\{x_i\},\{t_i\})=\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i).(x_i-x_{i-1})$, където $\{x_i\}$ е някакво разбиване на интервала $[a,b]$, а t_i са междинни точки, т.е. $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ за $i=1..n$, се нарича Риманова интегрална сума на f, определена от разбиването $\{x_i\}$ и междинните точки $\{t_i\}$.

Геометрично е ясно, че Римановата интегрална функция представлява сума от лица на правоъгълници, която апроксимира лицето на криволинейния трапец, определен от графиката на f, абсцисната ос и правите успоредни на ординатната ос, преминаващи през точките $(a,0)$ и $(b,0)$.

Казваме, че функцията f е интегруема по Риман (интегруема в Риманов смисъл) в интервала $[a,b]$, ако съществува число I, такова че Римановите интегрални суми клонят към I, при условие, че диаметърът на използваните разбивания клони към 0, т.е. за $\forall\ \varepsilon>0$, съществува $\delta>0$, такова че за всяко разбиване $\{x_i\}$ с $d(\{x_i\})<\delta$ и всеки избор на междинните точки t_i е изпълнено неравенството:

$$|\sigma(\{x_i\},\{t_i\})-I|<\varepsilon$$

Ако f е интегруема в Риманов смисъл, лесно се вижда (както единствеността на границата на една сходяща редица), че числото I е еднозначно определено и се нарича Риманов (определен) интеграл на f от a до b и се означава

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Твърдение:
Ако f е интегруема в Риманов смисъл в интервала $[a,b]$, то f е ограничена в $[a,b]$.

Доказателство:
Нека ε е произволно положително число и $I = \int_a^b f(x)dx$. Образуваме разбиване $\{x_i\}$ на $[a,b]$, такова че да имаме $|\sigma(\{x_i\},\{t_i\}) - I| < \varepsilon$ при всеки избор на междинните точки $\{t_i\}$. От неравенството на триъгълника имаме че

$$|x-y| + |y| \geq |(x-y)+y| = |x| \text{, т.е. } |x-y| \geq |x| - |y|.$$

Получаваме:

$$\varepsilon > |\sigma(\{x_i\},\{t_i\}) - I| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| =$$

$$= \left| f(t_k).(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| =$$

$$= \left| f(t_k).(x_k - x_{k-1}) - \left(I - \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=k+1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right)\right| \geq$$

$$\geq |f(t_k).(x_k - x_{k-1})| - \left|I - \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=k+1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\Rightarrow |f(t_k)| \leq \frac{\varepsilon + \left|I - \sum_{i=1}^{k-1} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=k+1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right|}{x_k - x_{k-1}}$$

Сега фиксираме t_i при $i \neq k$, и оставяме t_k да се мени в интервала $[x_{k-1}, x_k]$. От полученото неравенство получаваме, че функцията f е ограничена в подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$, определен от разбиването $\{x_i\}$. Тъй като можем да даваме на k стойности $1, 2, \dots n$, заключаваме, че f е ограничена в целия интервал $[a,b]$.

Предполагаме, че е фиксирана функция f, дефинирана и ограничена в интервала $[a,b]$. Нека имаме разбиване $\{x_i\}$ на $[a,b]$. Полагаме:

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i=1,2,\dots,n$$

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i=1,2,\dots,n$$

Ще отбележим, че числата m_i и M' са добре дефинирани, тъй като f е ограничена в $[a,b]$, а следователно и във всеки подинтервал на $[a,b]$, определен от разбиването $\{x_i\}$.

Сумите $s(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ и $S(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ наричаме съответно <u>малка и голяма сума на Дарбу</u>.

Тъй като $m_i \le f(t_i) \le M_i$ за всяко $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то имаме че $m_i(x_i - x_{i-1}) \le f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \le M_i(x_i - x_{i-1})$
$\Rightarrow s(\{x_i\}) \le \sigma(\{x_i\},\{t_i\}) \le S(\{x_i\})$.

Твърдение:

Нека функцията f е дефинирана и ограничена в интервала $[a,b]$. Нека τ е разбиване, определено от точките $\{x_i\}$ и x' е точка различна от x_i за $i=1,2,\dots,n$. Нека $\tau^* = \tau \cup \{x'_i\}$. Тогава:

1) $s(\tau^*) \ge s(\tau)$
2) $S(\tau^*) \le S(\tau)$

~~3) Ако $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, то $S(\tau) - S(\tau^*) \le 2.M.d(\tau)$ и $s(\tau^*) - s(\tau) \le 2.M.d(\tau)$.~~

3) Ако $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, то е вярно че:
$S(\tau) - S(\tau^*) \le (M-m)\,d(\tau)$ и $s(\tau^*) - s(\tau) \le (M-m)\,d(\tau)$

Доказателство:

Нека $x' \in [x_{i-1}, x_i]$. Такова i има единствено. Нека $m' = \inf_{x\in[x_{i-1},x']} f(x)$, $m'' = \inf_{x\in[x',x_i]} f(x)$. Ясно е, че $m' \ge m_i$ и $m'' \ge m_i$. Получаваме:

$$s(\tau^*) - s(\tau) = m'(x' - x_{i-1}) + m''(x_i - x') - m_i(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \underbrace{(m' - m_i)}_{\geq 0}\underbrace{(x' - x_{i-1})}_{\geq 0} + \underbrace{(m'' - m_i)}_{\geq 0}\underbrace{(x' - x_{i-1})}_{\geq 0} \ge 0$$

Тъй като $m' - m_i \le M - m$, $m'' - m_i \le M - m$,
$x' - x_{i-1} < x_i - x_{i-1} \le d(\tau)$ и $x_i - x' < x_i - x_{i-1} \le d(\tau)$, получаваме че

$$s(\tau^*) - s(\tau) = (m' - m_{i})(x' - x_{i-1}) + (m'' - m_i)(x_i - x') \le$$
$$\le (M - m)(x' - x_{i-1}) + (M - m)(x_i - x') =$$
$$= (M - m)(\cancel{x'} - x_{i-1} + x_i - \cancel{x'}) = (M - m)(x_i - x_{i-1}) \le (M - m) d(\tau)$$
$$\Rightarrow 0 \le s(\tau^*) - s(\tau) \le (M - m) d(\tau).$$

Аналогично, нека $M' = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x']} f(x)$ и $M'' = \sup\limits_{x \in [x', x_i]} f(x)$.
Ясно е, че $M'' \le M_i$ и $M' \le M_i$. Получаваме:

$$S(\tau) - S(\tau^*) = M_i (x_i - x_{i-1}) - M'(x' - x_{i-1}) - M''(x_i - x') =$$
$$= \underset{0}{\underset{\vee\!\mid}{(M_i - M')}} \underset{0}{\underset{\vee\!\mid}{(x' - x_{i-1})}} + \underset{0}{\underset{\vee\!\mid}{(M_i - M'')}} \underset{0}{\underset{\vee\!\mid}{(x_i - x')}} \ge 0.$$

Тъй като $M_i - M' \le M - m$, $M_i - M'' \le M - m$ и $x_i - x_{i-1} \le d(\tau)$ получаваме:

$$S(\tau) - S(\tau^*) = (M_i - M')(x' - x_{i-1}) + (M_i - M'')(x_i - x') \le$$
$$\le (M - m)(x' - x_{i-1}) + (M - m)(x_i - x') =$$
$$= (M - m)(x' - x_{i-1} + x_i - x') = (M - m)(x_i - x_{i-1}) \le (M - m) d(\tau)$$
$$\Rightarrow 0 \le S(\tau) - S(\tau^*) \le (M - m) d(\tau),$$ с което твърдението е доказано.

По-общо, ако τ^* се получава от τ чрез добавяне на k нови точки, то $0 \le S(\tau) - S(\tau^*) \le k(M - m) d(\tau)$ и $0 \le s(\tau^*) - s(\tau) \le k(M - m) d(\tau)$.

Твърдение:
Всяка малка сума на Дарбу не надминава коя да е голяма сума на Дарбу.

Доказателство:
Нека $s(\{x_i\})$ е малка сума на Дарбу, определена от разбиването $\{x_i\}$. Нека $S(\{y_j\})$ е голяма сума на Дарбу, определена от разбиването $\{y_j\}$. Нека τ е обединението на двете разбивания. Тогава с помощта на предходното твърдение получаваме следните неравенства:

$s(\{x_i\}) \le s(\tau)$ и $S(\tau) \le S(\{y_j\})$

От друга страна е ясно че $s(\tau) \le S(\tau)$ за всяко разбиване τ. Следователно:

$s(\{x_i\}) \le s(\tau) \le S(\tau) \le S(\{y_j\})$, с което теоремата е доказана.

От горното твърдение, че множеството от големите суми на Дарбу за f е ограничено отдолу от коя да е малка сума на Дарбу, освен това то е непразно, така че то има точна долна граница. Точната ~~гор~~ долна граница на големите суми на Дарбу за f се нарича **горен интеграл** на функцията f в интервала $[a,b]$ и се означава с $\overline{I}$.

Аналогично, от горното твърдение получаваме, че множеството от всички малки суми на Дарбу е ограничено отгоре от коя да е голяма сума на Дарбу. Освен това то не е празно, следователно има точна горна граница. Тази граница се нарича **долен интеграл** на функцията f в интервала $[a,b]$ и се означава с $\underline{I}$.

Казваме, че една функция f е интегруема в смисъл на Дарбу, ако горният интеграл на f е равен на долния, т.е. $\underline{I} = \overline{I}$.

Твърдение:

Нека f е дефинирана и ограничена в интервала $[a,b]$. Тогава горният интеграл на f в интервала $[a,b]$ е равен на границата на големите суми на Дарбу, когато диаметърът на разбиването на интервала $[a,b]$ клони към 0, т.е. за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, такова че за всяко разбиване ~~на~~ τ на интервала $[a,b]$ с $d(\tau)<\delta$ имаме $S(\tau)-\overline{I}<\varepsilon$.

Доказателство:

Фиксираме $\varepsilon>0$. Тогава $\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}$ не е точна горна граница на ~~го~~ големите суми на Дарбу

$\Rightarrow$ съществува разбиване τ_0 на $[a,b]$, такова че $S(\tau_0) < \overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}$. Нека τ_0 има k делящи точки. Да изберем числото δ така че да бъде изпълнено:

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2k(M-m)}$$

където $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Нека τ е такова разбиване, че $d(\tau)<\delta$. Като използване бележката след по-предното твърдение получаваме:

$$S(\tau) - S(\tau \cup \tau_0) \le k(M-m)d(\tau) <$$

$$< k(M-m).\delta < k(M-m).\frac{\varepsilon}{2k(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Освен това, $S(\tau \cup \tau_0) \le S(\tau_0) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow S(\tau \cup \tau_0) - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2}$$

След като съберем двете неравенства получаваме че:

$$S(\tau) - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Твърдение:

Нека f е дефинирана и ограничена в $[a,b]$. Тогава долният интеграл $\underline{I}$ на f в интервала $[a,b]$ е равен на границата на малките суми на Дарбу, когато диаметърът на разбиването на интервала $[a,b]$ клони към 0, т.е. за всяко $\varepsilon>0$, съществува $\delta>0$, такова че за всяко разбиване τ на интервала $[a,b]$ с $d(\tau)<\delta$ имаме $\underline{I} - s(\tau) < \varepsilon$.

Доказателство:

Аналогично на доказателството на предходното твърдение.

Твърдение:

Нека f е дефинирана и ограничена в $[a,b]$. Тогава f е интегруема в смисъл на Дарбу $\Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon>0$, съществува разбиване τ, такова че $S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$.

Доказателство:

($\Rightarrow$) Нека f е интегруема в смисъл на Дарбу и $I = \overline{I} = \underline{I}$. Избираме $\varepsilon>0$. От дефиницията за горен и долен интеграл следва че съществува разбиване τ', такова че $S(\tau') - \overline{I} < \varepsilon/2$ и разбиване τ'', такова че $\underline{I} - s(\tau'') < \varepsilon/2$.

Нека $\tau = \tau' \cup \tau''$. Тогава $S(\tau) \le S(\tau') \Rightarrow S(\tau) - I < \frac{\varepsilon}{2}$

Също така $s(\tau) \ge s(\tau'') \Rightarrow I - s(\tau) < \frac{\varepsilon}{2}$

Следователно (след събиране на двете неравенства):

$$S(\tau) - s(\tau) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Нека $\varepsilon > 0$ и да имаме разбиване τ, такова че $S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$. Изпълнени са равенствата

$$s(\tau) \le \underline{I} \le \overline{I} \le S(\tau)$$

$\Rightarrow \overline{I} - \underline{I} \le S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$

Последното неравенство е изпълнено за всяко $\varepsilon > 0 \Rightarrow \underline{I} = \overline{I} \Rightarrow f$ е интегруема в смисъл на Дарбу

Теорема:

Нека f е дефинирана в интервала $[a,b]$. Тогава f е интегруема в Риманов смисъл $\Leftrightarrow$ f е ограничена и интегруема в смисъл на Дарбу.

Доказателство:

($\Leftarrow$) Нека f е ограничена и интегруема в смисъл на Дарбу. Тогава $I = \underline{I} = \overline{I}$. В сила са неравенствата:

$$s(\{x_i\}) \le \sigma(\{x_i\}, \{t_i\}) \le S(\{x_i\})$$

за всяко разбиване $\{x_i\}$. В тях извършваме граничен преход при $d(\{x_i\}) \to 0$, използваме двете твърдения от по-горе и получаваме

$s(\{x_i\}) \to I$, $S(\{x_i\}) \to I$

$\Rightarrow \sigma(\{x_i\}, \{t_i\}) \to I$. Следователно f е интегруема по Риман.

($\Rightarrow$) Нека f е интегруема по Риман. Тогава от първото твърдение получаваме, че f е ограничена в $[a,b]$. Фиксираме $\varepsilon > 0$. Избираме $\delta > 0$, такова че за всяко разбиване $\{x_i\}$ с $d(\{x_i\}) < \delta$, да имаме

$$|\sigma(\{x_i\}, \{t_i\}) - I| < \frac{\varepsilon}{6} \Leftrightarrow I - \frac{\varepsilon}{6} < \sigma(\{x_i\}, \{t_i\}) < I + \frac{\varepsilon}{6}$$

за всеки избор на междинните точки $\{t_i\}$.

Нека $\alpha = \frac{\varepsilon}{3(b-a)} > 0$. Тъй като $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, то $M_i - \alpha$ не е супремум. Следователно съществуват междинни точки t_i', такива че $f(t_i') > M_i - \alpha$ за $\forall i$.

Образуваме съответната риманова сума със същото разбиване $\{x_i\}$ и междинните точки t_i'. Имаме:

$$\sigma(\{x_i\},\{t_i'\}) > S(\{x_i\}) - \alpha(b-a) = S(\{x_i\}) - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow S(\{x_i\}) - \frac{\varepsilon}{3} < I + \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow S(\{x_i\}) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично, тъй като $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, тогава $m_i+\alpha$ не е инфимум. Следователно съществуват междинни точки t_i'', такива че $f(t_i'') < m_i+\alpha$ за всяко i. Образуваме съответната риманова сума със същото разбиване $\{x_i\}$ и междинни точки t_i''. Имаме:

$$\sigma(\{x_i\},\{t_i''\}) < s(\{x_i\}) + \alpha.(b-a) = s(\{x_i\}) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow s(\{x_i\}) + \frac{\varepsilon}{3} > I - \frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow s(\{x_i\}) > I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} S(\{x_i\}) < I + \frac{\varepsilon}{2} \\ s(\{x_i\}) > I - \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right. \Rightarrow S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

~~Така получихме~~

С помощта на предходното твърдение и неравенството, което получихме сега, стигаме до извода, че f е интегруема по Дарбу.

С това теоремата е доказана.

От предходните теорема и твърдение получаваме, че следните условия за една функция f, дефинирана в интервала $[a,b]$, са еквивалентни:

1) f е интегруема в Риманов смисъл
2) f е ограничена и интегруема в смисъл на Дарбу.
3) f е ограничена и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова разбиване τ на $[a,b]$, че $S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$.

Теорема на Кантор:

Ако $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния затворен интервал $[a,b]$, то $f(x)$ е равномерно непрекъсната в $[a,b]$.

Теорема:

Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния затворен интервал $[a,b]$. Тогава $f(x)$ е интегруема в Риманов смисъл.

Доказателство:

Преди ~~все~~ всичко от теоремата на Вайерщрас f е ограничена, така, че е достатъчно да докажем, че за $\forall \varepsilon > 0$ съществува разбиване τ, такова че
$S(\tau) - s(\tau) < \varepsilon$.

От теоремата на Кантор следва че $f(x)$ е равномерно непрекъсната в $[a,b]$. Фиксираме $\varepsilon > 0$. Да изберем такова $\delta > 0$, че от $x', x'' \in [a,b]$ и $|x' - x''| < \delta$ да следва че $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Образуваме разбиване $\{x_i\}$ на $[a,b]$, такова че $d(\{x_i\}) < \delta$. Разглеждаме интервала $[x_{i-1}, x_i]$. От теоремата на Вайерщрас $M_i = f(x')$ и $m_i = f(x'')$ за някои $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$.
Тъй като $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$, то $|x' - x''| < d(\{x_i\}) < \delta$.
Следователно $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow M - m < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Получаваме:
$$S(\{x_i\}) - s(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} . (x_n - x_0) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Така доказахме, че $f(x)$ е интегруема в Риманов смисъл.

Свойства на Римановия интеграл:

① Ако интегруемата в интервала $[a,b]$ функция $f(x)$ удовлетворява неравенствата $m \le f(x) \le M$, то
$$\cancel{m \le}\ m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

② Ако функцията $f(x)$, дефинирана в интервала $[a,b]$, е интегруема, а C е константа, то $C.f(x)$ е също интегруема и при това
$$\int_a^b C.f(x)\,dx = C.\int_a^b f(x)\,dx$$

(3) Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$, дефинирани в интервала $[a, b]$, са интегруеми, то и тяхната сума $f(x)+g(x)$ е интегруема функция и при това:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(4) Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$ и ако $f(x) \leq g(x)$ за всяко x от този интервал, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(5) Ако функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$, то интегруема е и функцията $|f(x)|$, като при това:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(6) Ако $f(x)$ е дефинирана и ограничена в $[a, b]$, а c е една вътрешна точка за този интервал, то $f(x)$ е интегруема в $[a, b]$ тогава и само тогава, когато е интегруема в $[a, c]$ и $[c, b]$, като при това

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(7) Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в $[a, b]$ и интегруеми, то и тяхното произведение е интегруема функция.

Теорема:

Нека $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$. Тогава съществува $t \in [a, b]$, такова че:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(t)\cdot(b-a)$$

Доказателство:

От теоремата на Вайерщрас, следва че f е ограничена. Нека $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

За всяко $x \in [a,b]$ имаме:

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\cdot(b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

От теоремата на Вайерщрас $m = f(x_1)$ и $M = f(x_2)$ за някои $x_1, x_2 \in [a,b]$. От теоремата за междинните стойности, съществува ~~$t\in[x_1,x_2]$~~ t между x_1 и x_2 такова че $f(t) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(t)\cdot(b-a).$$

Теорема (Лайбниц-Нютон)

Нека $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция. Тогава функцията $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ е диференцируема и нейната производна е $f(x)$ за всяко $x\in[a,b]$.

Доказателство:

Нека $x \in [a,b]$. Записваме диференчното частно на $F(x)$: $(x+h \in [a,b])$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\cdot\left[\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right]$$

Съгласно горната теорема съществува ~~та~~ точка $u_h \in [x, x+h]$, такава че:

$$f(u_h) = \frac{1}{h}\cdot\left[\int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt\right]$$

След като извършим граничен преход при $h \to 0$ получаваме че

$u_h \to x \Rightarrow f(u_h) \to f(x)$, тъй като $f(x)$ е непрекъсната $\Rightarrow \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \to f(x) \Rightarrow F(x)$ е диференцируема и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in [a,b]$.

Да предположим, че трябва да пресметнем интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, където $f(x)$ е непрекъсната функция. Образуваме функцията $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Тогава очевидно търсеното число е $F(b)$.

Нека $\Phi(x)$ е примитивна на $f(x)$ в $[a,b]$. От теоремата на Нютон-Лайбниц $F(x)$ също е примитивна на $f(x)$ в $[a,b]$. Следователно съществува константа C, такава че $F(x) = \Phi(x) + C$, т.е. за всяко $x \in [a,b]$. При $x = a$ получаваме:

$F(a) = \Phi(a) + C \Rightarrow 0 = \Phi(a) + C \Rightarrow C = -\Phi(a)$

Получихме, че $F(x) = \Phi(x) + \Phi(a)$ за всяко $x \in [a,b]$.

Следователно $F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b$, където Φ е произволна примитивна функция на $f(x)$ в $[a,b]$