

27. Теорема за средните стойности (Рол, Лагранж, Коши). Формула на Тейлър

Дефиниция. Всеки отворен интервал, съдържащ точката a ще наричаме околност на точката a . Ще казваме, че точката a е вътрешна точка за интервала M , ако съществува околност ξ на точката a и $\xi \subset M$;

Дефиниция. Ще казваме, че функцията $f(x)$ има локален максимум (минимум) в точка C от своята дефиниционна област, ако съществува околност δ на точката C , за която $f(c) \geq f(x), \forall x \in \delta$ ($f(x) \geq f(c), \forall x \in \delta$). Ако функцията f има локален максимум или локален минимум ще казваме, че f има локален екстремум.

Теорема на Ферма.

Ако функцията $y = f(x)$ е диференцируема в една вътрешна точка C от своята дефиниционна област и има локален екстремум в тази точка, то $f'(c) = 0$.

Теорема на Вайерщрас.

Ако дадена функция $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, тя достига в този интервал точната си горна и точната си долна граница.

Теорема на Рол.

Ако функцията f е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, диференцируема в отворения интервал (a, b) и $f(a) = f(b)$, тогава съществува ξ принадлежаща на (a, b) и $f'(\xi) = 0$.

Доказателство:

Тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, то тя е ограничена. Да означим съответно с L и I точната й горна и точната й долна граница в интервала $[a, b]$.

Ако $I = L$, то поради неравенството $I \leq f(x) \leq L$, изпълнени за всяко x от интервала $[a, b]$, функцията $f(x)$ ще бъде константа в този интервал. Тогава нейната производна е нула в целия интервал (a, b) и теоремата е доказана.

Остава да разгледаме случая, когато $I < L$. Съгласно теоремата на Вайерщрас съществуват две точки x_1 и x_2 от интервала $[a, b]$ такива, че $f(x_1) = I$ и $f(x_2) = L$. Поне една от тези две точки е вътрешна за интервала $[a, b]$. И наистина ако допуснем противното, т.е. ако имаме $x_1 = a, x_2 = b$ или пък $x_1 = b, x_2 = a$, то от условието бихме получили $I = L$. Нека x_1 е вътрешна за интервала $[a, b]$. Но $f(x_1) = I$. Тогава функцията $f(x)$ ще има локален минимум в точката x_1 , поради което съгласно теоремата на Ферма ще имаме $f'(x_1) = 0$. Ако пък x_1 е крайна точка за интервала $[a, b]$, то точката x_2 ще бъде вътрешна. В такъв случай това ще бъде една точка на локален максимум и следователно пак по теоремата на Ферма ще имаме $f'(x_2) = 0$. И така във всички случаи съществува точка ξ принадлежаща на $[a, b]$, за която $f'(\xi) = 0$.

Теорема на Лагранж (формула на Лагранж за крайните нараствания)

Ако функцията f е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, диференцируема в отворения интервал (a, b) , то съществува $\xi \in (a, b)$, за която $f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$.

Доказателство:

$$\text{Нека } F(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)(f(b)-f(a))}{b-a}$$

$F(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, като разлика на непрекъсната в този интервал функция $f(x)$ и линейна функция и във всяка вътрешна точка на $[a, b]$ има производна равна на:

$$F'(x) = f'(x)$$

Имаме $F(a) = F(b) = 0$ и за функцията $F(x)$ са изпълнени всички условия от теоремата на Рол.

Следователно съществува $\xi \in (a, b)$ такава, че

$$F'(x) = 0$$

Или $f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi)$, с което теоремата е доказана.

Теорема на Коши за крайните нараствания.

Ако $f(x)$ и $g(x)$ се непрекъснати в $[a, b]$ и диференцируеми в (a, b) и $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a, b)$, то съществува $\xi \in (a, b)$, за която

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
 - обобщена формула на крайните нараствания на Коши.

Доказателство:

Ще докажем, че $g(a) \neq g(b)$. Да приемем, че $g(a) = g(b)$, следователно за $g(x)$ в интервала $[a, b]$ и е в сила теоремата на Рол. Следователно съществува точка $\xi \in (a, b)$, такава че $g'(\xi) = 0$, което е противоречие с условието. Следователно $g(a) \neq g(b)$.

Можем да разгледаме помощната функция $F(x)$.

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$F(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, като разлика на непрекъснати в този интервал функции $f(x)$ и $g(x)$ и във всяка вътрешна точка на $[a, b]$ има производна равна на:

$$F'(x) = \frac{f'(x)(g(x) - g(a)) - (f(x) - f(a))g'(x)}{(g(x) - g(a))^2}$$

Имаме $F(a) = F(b) = 0$ и за функцията $F(x)$ са изпълнени всички условия от теоремата на Рол. Следователно съществува $\xi \in (a, b)$ такава, че $F'(\xi) = 0$ от условието $g'(\xi) \neq 0$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$
 което доказва теоремата.

Формулата на Лагранж е частен случай от формулата на Коши при $g(x) = x$.

Теорема на Тейлър.

Да предположим, че функцията $f(x)$ притежава производна до ред $(n+1)$ в някоя околност δ на една точка a от нейната дефиниционна област. За всяко x принадлежащо на δ съществува точка ξ между x и a такава, че:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$
 - формула на Тейлър.

Доказателство:

Да разгледаме функциите:

$$g(t) = f(t) + \frac{f'(t)(x-t)}{1!} + \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!} + \dots + \frac{f^n(t)(x-t)^n}{n!}$$

$$h(t) = (x-t)^{n+1}$$

$$g'(t) = f'(t) + \frac{f''(t)(x-t)}{1!} - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f'''(t)(x-t)^2}{2!} - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} - \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{(n-1)!} = \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!}$$

$$h'(t) = -(n+1)(x-t)^n$$

За функциите $h(t)$ и $g(t)$ прилагаме теорема на Коши за крайните в интервал (a, x) или (x, a) .

$h'(t) \neq 0$ за всяко $t \in (a, x)$ или (x, a) и $h(t)$ и $g(t)$ са непрекъснати и диференцируеми в (a, x)

и (x, a) следователно съществува т. $\xi \in (a, x)$ или (x, a) , така че: $\frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$ от дефиницията:

$$g(x) - g(a) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!} f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$h(x) - h(a) = -h(a) = -(x-a)^{n+1}$$

$$g'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}$$

$$h'(\xi) = -(n+1)(x-\xi)^n$$

$$\Rightarrow g(x) - g(a) = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} (h(x) - h(a))$$

или

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

, което доказва

теоремата