# Алгоритми в графи с тегла на ребрата. Оценки за сложност.

Когато говорим за сложност на алгоритми в графи, ще имаме предвид два показателя – броя n на върховете и броя m на ребрата.

***Дефиниция:*** Нека G($V$ , $E$) е свързан граф и $c: E \to R$ е функция с реални стойности, дефинирана по ребрата на графа. Стойността $c(e), e \in E$, наричаме *цена* или *тегло* на реброто $e$. Нека $D(V, E')$ е покриващо дърво на G($V$ , $E$). Цена (тегло) на дървото ще наричаме сумата $c(D) = \sum_{e \in E'} c(e)$. Покриващото дърво $D_0(V, E_0)$ на G($V$ , $E$) наричаме *минимално* (*максимално*), ако $c(D_0) \le c(D)$ (съответно $c(D_0) \ge c(D)$), за всяко друго покриващо дърво D на G($V$ , $E$).

*Забележка:* Понятията максимално и минимално покриващо дърво са аналогични, затова ще говорим за *оптимално покриващо дърво*, означавайки с това понятие кое да е от двете. Ще разглеждаме само минимално покриващо дърво. Аналогично изводи могат да се правят за максимално покриващо дърво, ако се замени min с max, и се обърнат неравенствата.

***Теорема:*** Нека $D_0(V, E_0)$ е свързан граф с ценова функция на ребрата $c$: $E \to R$ и $\varnothing \subset U \subset V$. Нека $e = (v_i, v_j) \in E$ е такова, че $v_i \in U, v_j \notin V$ и $e$ има минимално тегло измежду всички такива ребра. Тогава съществува МПД (минимално покриващо дърво) $D_0(V, E_0)$ на G($V$ , $E$), такова че $e \in E_0$.

*Доказателство:* Допускаме, че не съществува МПД което да съдържа реброто $e$. Взимаме си произволно МПД $D(V, E')$. От допускането, е$\notin E'$. Образуваме графа $G'(V, E' \cup \{e\})$. Очевидно $G'$ има точно 1 цикъл, който поне още един път пресича границата м/у {U} и {V\U}. Нека това да бъде реброто (u,v), но $e$ има минимално тегло измежду всички такива ребра $\Rightarrow c(e) \le c(u,v)$. Строим дървото $D'(V, E' \cup \{e\} - \{(u,v)\})$, което съдържа *е*. $D'$ е покриващо дърво на G($V$ , $E$) и $c(D') \le c(D)$. Ако допуснем, че $c(D') < c(D) \Rightarrow$ противоречие с това, че $D(V, E')$ е минимално покриващо дърво.

Сега ще разгледаме едни от най-популярните алгоритми за построяване на МПД, а именно алгоритъма на Прим, и алгоритъма на Крускал

***Алгоритъм на Прим:*** Нека е даден G($V$ , $E$) и функция $c: E \to R$, задаваща теглата на ребрата му. Алгоритъмът на Прим строи минимално покриващо дърво с корен зададен връх $r \in V$ на G.

*Процедура:*

1) $D_0(V_0, E_0)$, $V_0 = \{r\}, E_0 =$ Ø и $k$ = 0.

2) Нека сме построили $D_k(V_k, E_k)$. Търсим реброто $e = (v_i, v_j)$, $v_i \in V_k$, а $v_j \notin V_k$, което да има минимално тегло и построяваме $D_{k+1}(V_{k+1}, E_{k+1}), V_{k+1} = V_k \cup \{v_j\}, E_{k+1} = E_k \cup \{e\}$ и $k = k+1$.
3) Ако $V_k = V$ край и обявяваме $D_k(V_k, E_k)$ за оптимално, иначе преминаваме към стъпка 2).

*Забележка:* Ако за реализацията на алгоритъма използваме матрица на съседства, сложността му ще бъде O($n^3$). Ако използваме двоична пирамида и списък на наследниците, сложността може да се сведе до $O(m \log n)$. С използване на пирамида на Фибоначи, можем да ускорим алгоритъма до $O(m + n \log n)$.

***Алгоритъм на Крускал:*** Нека е даден G($V$, $E$) и функция $c: E \to R$, задаваща теглата на ребрата му. Алгоритъмът строи минимално покриващо дърво на G (некореново МПД).

*Процедура:*

1) Сортираме ребрата на G в нарастващ ред на цената и нека този ред е $e_0, e_1, ..., e_m$.
2) От всеки връх на графа образуваме тривиално дърво $D_v(\{v\}, \{\})$.
3) За всяко ребро $e_i = (v_{i_1}, v_{i_2})$, $i \in I_m$ (по реда определен в сортирането)

правим следното: ако $v_{i_1}$ и $v_{i_2}$ са в различни дървета $D'(V', E')$ и $D''(V'', E'')$ обединяваме двете дървета с реброто $e_i$ $D(V' \cup V'', E' \cup E'' \cup \{e_i\})$.

*Забележка:* Алгоритъмът на Крускал строи МПД, понеже на всяка стъпка взима най-лекото ребро (понеже обхождаме ребрата от най-леко към най-тежко), т.е. ако едно ребро е по-леко от друго то се избира по-рано за построяване на дървото. Ако двата края на едно ребро са в едно и също поддърво то второто ребро няма да се вземе (понеже вече има по-леки ребра които сме взели за свързването на двата края).

*Забележка:* Алгоритъмът на Крускал е със сложност $O(m \log m)$, което е сложността на сортиране на ребрата. Действително, сложността на стъпка 2 е $O(n)$, а използвайки абстрактния тип „разбиване", имплементиран с гора от „повдигани" на всяка find-стъпка коренови дървета, за стъпка 3) ще получим сложност само $O(m.\log^* n)$.

***Най-къс път в граф:*** Нека G($V$, $E$) е свързан граф, а $c$: $E \to R^+$ – теглова функция на ребрата с положителни реални стойности. *Претеглена дължина* на пътя $v_{i_0}, v_{i_1}, ..., v_{i_l}$ в графа ще наричаме $\sum_{j=0}^{l-1} c(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$. Пътят от $v_{i_0}$ до $v_{i_l}$ с най-малка претеглена дължина наричаме *най-къс път* от $v_{i_0}$ до $v_{i_l}$. Естесвено е да дефинираме претеглена дължина 0 за тривиален път от *v* до *v*.

Ще разгледаме следната задача: *Да се намеят дължините на най-късите пътища (и самите най-къси пътища) от зададен връх $v_0$ до всички останали върхове на свързания граф G($V$ , $E$ ) с теглова функция $c: E \to R^+$.*

В частния случай $c(e)=1$, $\forall e \in E$, претеглената дължина е равна на дължината на пътя. За този частен случай решението на задачата се дава от следната:

***Теорема:*** Нека G($V$ , $E$) е свързан граф с теглова функция $c(e)=1$, $\forall e \in E$ и D е покриващо дърво на G корен $v_0$, построено в ширина. Пътищата в D от корена $v_0$ до останалите върхове на G са най-къси пътища от $v_0$ до тези върхове.

*Доказателство:* Ще направим индукция по $i$ (нивата на обхождане в ширина).

1) $i = 0$ $L_0 = \{v_0\}$ и най-късият път от $v_0$ до $v_0$ е тривиалният път с дължина 0.
2) Допускаме, че твърдението е вярно за върховете от ниво $i$.
3) Ще докажем, че дължините на най-късите пътища от $v_0$ до върховете от $L_{i+1}$ са равни на $i+1$ и значи пътищата от корена до тези върхове в дървото са най-къси. Допускаме че $\exists v \in L_{i+1}$, за който дължината на най-късия път от $v_0$ до *v* ($v_0,...,w,v$) е $k < i+1$. $\Rightarrow$ пътят $v_0,...,w$ е най-къси път от $v_0$ до $w$ и дължината му е $k-1<i$, Но съгласно индукционното предположение $w \in L_{i-1}$, което е противоречие с това че $v \in L_{i+1}$ ($v$ трябва да е от $L_i$).

***Алгоритъм на Дийкстра:*** Даден е свързан граф G($V$ , $E$) с теглова функция $c: E \to R^+$ и начален връх $v_0 \in V$. Да се намери дърво на най-късите пътища от $v_0$ до всички останали върхове от G.

*Процедура:* Нека $V$={ $v_0=0,1,2,\ldots,n$}. ще използваме два масива – dist и part. dist[$i$] ще съдържа временно най-късият път от $v_0$ до $i$, в part[$i$] ще пазим бащата (предшестващия връх) на $i$ по този път. На всяка стъпка алгоритъмът ще намира най-късия път до един от върховете, образувайки множеството VISITED, от върхове за които най-късият път е намерен. В началото на алгоритъм VISITED= $\{0\}$ ( само $v_0$ е посетен и дължината на най-късия път е 0).

1) Разширяваме $c: E \to R^+$ до $c^*: V \times V \to R^+$, където

$$c^*: V \times V \to R^+ = \begin{cases} c(v_i, v_j), (v_i, v_j) \in E \\ безкрайност, (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

2) Нека dist[0]=0; part[0]= -1; VISITED= $\{0\}$, а dist[$i$]=$c^*(0,i)$ и part[$i$]=0, за $i$=1..n.
3) Потвтаряме n пъти следните стъпки

3.1) Избираме връх $j \notin \text{VISITED}$, за който dist[ $j$ ] е минимално и го добавяме към посетените върхове VISITED = VISITED$\cup\{j\}$.

3.2) За всеки връх $k \notin \text{VISITED}$ пресмятаме

dist[$k$]=min(dist[$k$],dist[ $j$ ]+$c^*(j,k)$). Ако min е dist[ $j$ ]+$c^*(j,k)$, тогава part[$k$]= $j$.

Както се забелязва, алгоритъмът взима първият връх с минимално временно разстояние до началният връх и обявява това разстояние за минимално. Ще докажем че това поведение на алгоритъмът на Дийкстра е основателно. За краткост в следващите твърдения вместо VISITED ще използваме U.

***Лема:*** Върховете на графа влизат в U в ненамаляващ ред на дължината на най-късите си пътища (монотонно свойство)

*Доказателство:*

1) При $U$ = {0}, $d_0$=0.
2) Допускаме че твърдението е вярно за някакво $k$, т.е. $d_0 \le d_1 \le ... \le d_k$, където $d_i$ е дължината на най-късия път на върха $v_i$, влязал в $U$ на $i$-тата стъпка.
3) Допускаме, че $d_0 \le d_1 \le ... \le d_k > d_{k+1}$. Но $d_{k+1}$= min($d_{k+1}, d_k + c^*(v_k, v_{k+1})$), а $c^*(v_k, v_{k+1})$ > 0 $\Rightarrow d_{k+1} < d_k + c^*(k, k+1)$, което е невъзможно понеже когато сме избирали $d_k$, то $d_k < d_{k+1} \Rightarrow$ противоречие.

***Дефиниция:*** Нека G($V$ , $E$) е граф, V={0,1,…,n}. Нека U$\subset V$, U≠Ø и $0, i_1, i_2, .., i_{k-1}, i_k$ е път от 0 до $i_k$, такъв че $0, i_1, i_2, .., i_{k-1} \in U$. Такъв път наричаме *специален път* по отношение на U

***Теорема:*** Нека U$\subseteq V$ е получено след поредна стъпка на алгоритъма на Дийкстра, тогава:

**I)** $\forall i \in U$ в dist[$i$] е дължината на най-късият път от 0 до $i$ (и за $i \ne 0$ в part[$i$] е бащата на $i$ по този най-къс път).
**II)** $\forall k \notin U$ в dist[$k$] е дължината на най-късия специален път (по отношение на U) от 0 до k (в part[$k$] е бащата на k по този най-къс път).

*Доказателство:* Ще докажем паралелно I) и II) с индукция по построяването на U

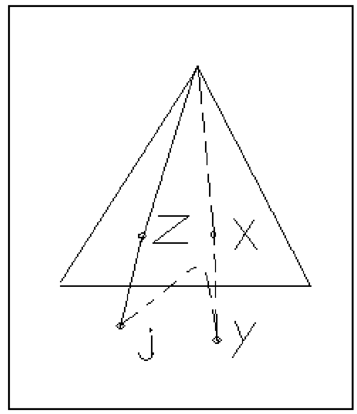
*1)* Нека U= $\{0\}$.

**I)** Тривиалният път е най-къс път от 0 до 0 (0 е корен на бъдещото дърво на най-късите пътища, следователно няма баща.

**II)** Специален път до k е само реброто (0, к), тъй като U= $\{0\}$. В действителност, в този момент dist[$k$] съдържа дължината на съответното ребро (безкрайност за тези които не са свързани с 0). Освен това за всеки връх k в part[$k$] е посочен като баща 0, което съответства на така получените временно най-къси пътища.

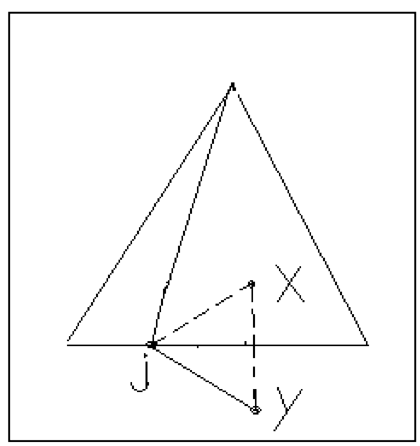
2) Да допуснем че твърденията **I)** и **II)** са в сила за някое U.

3) Нека $U' = U \cup \{j\}$




**I)** За $\forall i \in U$ в dist[$i$] е дължината на най-късият път съгласно индукционното предположение **I)**. Да допуснем, че запомненето в dist[$j$] не е дължина на най-къс път от 0 до $j$ (съответно запомненият път в part не е най-къс). Но съгласно индукционното предположение **II)** това е най-късият специален път до $j$ по отношение на U. Откъдето следва, че най-късият път не е специален и поне веднъж напуска U преди да стигне до $j$. Нека да означим с y първият връх $\notin U$, по този път, а с z – предпоследния връх по запомнения в part път. От това че специалният път 0,...,z,j не е най-къс следва, че dist[j]=$c^*$(0,...,z,j) > $c^*$(0,...,x,y,…,j) > $c^*$(0,...,x,y), Второто неравенство идва от това че ребрата са неотрицателни. Но 0,...,x,y е най-къс специален път до е най-къс специален път до y $\Rightarrow$ dist[y]= $c^*$(0,...,x,y) < dist[j], но това е противоречие с избора на j. Алгоритъмът на Дийкстра трябваше да избере y. Следователно допускането е невярно и специалният път до j е глобално най-къс.

**II)** Съществуват 3 възможности за $k \notin U$ след разширяването на U с j**:**




а) dist[k] да остане най-къс специален път до *k* и спрямо $U'$– алгоритъмът отчита тази възможност.

б) dist[k] = dist[k] + $c^*$(j,k) да стане най-къс специален път до *k* спрямо $U'$. Алгоритъмът отчита и тази възможност.

в) най-късият специален път до *k* да минава през *j*, но *j* не е предпоследен връх. Нека предпоследният връх по най-късия специален път до върха *j* е *x* от *U* (т.е. *x* е влязал в *U* преди *j*). $\Rightarrow c^*$(0,...,j) < $c^*$(0,...,j,..,x), защото теглата на ребрата са положителни. Но това е в противоречие с Лемата за монотонност.

Няма други случаи, понеже индукционното предположение изключва възможността да има минимален специален път, неизползващ j, различен от запомнения

*Забележка:* Алгоритъмът има сложност $O(n^2 + m) = O(n^2)$, Понеже за всеки връх се опитваме да намерим най-краткият път до останалите непосетени. Такава сложност ще получим, ако пазим дължините на временно най-късите пътища в масив. Но ако пазим най-късите пътища в приоритетна опасшка и представим графа със списък на съседите, можем да получим алгоритъм със сложност $O((n+m)\log n) = O(m \log n)$–добра при графи с малко ребра. Но най-добра сложност се постига с използване на пирамида на Фибоначи – $O(m + n\log n)$.

***<u>Алгоитъм на Флойд:</u>*** Нека е даден граф G($V$, $E$), алгоритъмът намира най-кратките разстояния между всяка двойка върхове от графа и то без да е необходима допълнителна памет. Ще използваме с матрица на теглата A[i][j] на графа G. В началото в A[i][j] стои стойността на реброто (i, j), ако има такова или ∞ в противен случай. Нека n = |V|

*Процедура:*

```
for (k = 1; k ≤ n; k++) {
    for (i = 1; i ≤ n; i++) {
        for (j = 1; j ≤ n; j++) {
            if (A[i][j] > A[i][k] + A[k][j]) {
                A[i][j] = A[i][k] + A[k][j]
            }
        }
    }
}
```

*Забележка:* Алгоритъмът започва с реброто между м/у $i$ и $j$, като временно най къс път – най-къс път не минаващ през други върхове. Да допуснем че знаем дължините на най-късите пътища от всеки връх до всеки друг връх, не минаващи през върховете *k, k+1,…,n*. Тогава на поредната *k*-та стъпка алгоритъмът проверява само дали пътят през върха $k$ не е по-къс от текущо намереният и ако е така, запомня неговата дължина. Алгоритъмът е със сложност $\Theta(n^3)$, понеже има 3 вложени цикъла.