30. Конични сечения – парабола, елипса, хипербола. Свойства.

Получаване на каноничните уравнения на парабола, елипса и хипербола като множества от точки чрез фокус и директриса. Фокални свойства на елипса и хипербола.

Нека *F* и g са фиксирани точка и права, като $F \notin g$. Множеството от точки *M* в равнината $\alpha = (F, g)$, такива че $\frac{|MF|}{|M,g|} = e$, където $e > 0$ е константа, се нарича **конично сечение *k*** с **фокус** *F*, **директриса** *g* и **ексцентритет** *e*.

Ще намерим уравнение на *k* спрямо подходяща ортонормирана координатна система в α.

Избираме ортонормирана координатна система $K' = O'\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$, такава че $O' \in g, O'F \perp g, \overrightarrow{e_1}^{K'} = \frac{\overrightarrow{O'F}}{|\overrightarrow{O'F}|}$. И нека $\overrightarrow{e_2} \parallel g$. Тогава $F^{K'}(p, 0)$, където $p = |F, g|$ (тъй като точката и правата са дадени, можем да приемем, че ни е известно и разстоянието между тях) и $g^{K'}: x' = 0$ (тоест това е нормалното уравнение на правата *g* спрямо *K'*).

Нека точката $M^{K'}(x', y')$. Следователно $|MF| = \sqrt{(p - x')^2 + y'^2}$ и $|M, g| = |x'|$.

Точката *M* е от коничното сечение $k \Leftrightarrow \frac{|MF|}{|M,g|} = e \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(p-x')^2+y'^2}}{|x'|} = e \Leftrightarrow (p - x')^2 + y'^2 = e^2x'^2 \Leftrightarrow p^2 - 2px' + x'^2 + y'^2 - e^2x'^2 = 0 \Leftrightarrow (1 - e^2)x'^2 - 2px' + y'^2 + p^2 = 0$.

Така получихме, че спрямо *K'* коничното сечение *k* има уравнение:

$$k^{K'}: (1 - e^2)x'^2 - 2px' + y'^2 + p^2 = 0$$

С цел опростяване на това уравнение, преминаваме към втора ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$, чието начало *O* ще определим допълнително (в зависимост от *e*).

Ако $M^{K'}(x', y')$ и $M^{K}(x, y)$, то

$$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow k^K: (1 - e^2)(x^2 + 2x\alpha + \alpha^2) - 2p(x + \alpha) + y^2 + p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^K: y^2 + (1 - e^2)x^2 + 2\big((1 - e^2)\alpha - p\big)x + (1 - e^2)\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 = 0$$

- $e = 1$

Тогава $k^K: y^2 - 2px - 2p\alpha + p^2 = 0$. Стойността на α определяме от $p^2 - 2p\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{p}{2}$. В този случай коничното сечение се нарича **парабола**, а уравнението:

$$\pi^K: y^2 - 2px = 0$$

- **канонично уравнение на парабола π**.

Тогава $F^{K'}(p,0) \Rightarrow \begin{cases} x = x' - \alpha = x' - \frac{p}{2} \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow F^K\left(\frac{p}{2},0\right)$ и $g^K: x = -\frac{p}{2}$.

- ❖ $e \neq 1$

Тогава ще определим α по следния начин: $(1-e^2)\alpha - p = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{p}{1-e^2} \Rightarrow p^2 + (1-e^2)\alpha^2 - 2p\alpha = p^2 + \frac{p^2}{1-e^2} - \frac{2p^2}{1-e^2} = p^2 - \frac{p^2}{1-e^2} = -\frac{p^2e^2}{1-e^2}$. Така спрямо K коничното сечение ще има уравнение:

$$k^K: (1-e^2)x^2 + y^2 - \frac{p^2e^2}{1-e^2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$k^K: \frac{x^2}{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2e^2}{1-e^2}} = 1$$

Тогава $F^{K'}(p,0) \Rightarrow \begin{cases} x = x' - \alpha = x' - \frac{p}{1-e^2} \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow F^K\left(-\frac{pe^2}{1-e^2},0\right)$ и $g^K: x = -\frac{p}{1-e^2}$.

- $e < 1 \Rightarrow 1 - e^2 > 0$. Означаваме с $a^2 = \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}, a > 0$ и $b^2 = \frac{p^2e^2}{1-e^2}, b > 0$. В този случай коничното сечение се нарича **елипса**, а уравнението:

$$\varepsilon^K: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- **канонично уравнение на елипсата *ε***.

- $e > 1 \Rightarrow 1 - e^2 < 0$. Означаваме с $a^2 = \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}, a > 0$ и $b^2 = \frac{p^2e^2}{e^2-1}, b > 0$. В този случай коничното сечение се нарича **хипербола**, а уравнението:

$$\chi^K: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- **канонично уравнение на хиперболата *χ***.

Спрямо подходяща ортонормирана координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ параболата $\pi^K: y^2 - 2px = 0$, $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ и $g: x = -\frac{p}{2}$. От уравнението следва, че ако $M(x,y) \in \pi$, то $x \geq 0$. Следователно всички точки на π са в една полуравнина спрямо $O\overrightarrow{e_2}$.

Ако $M(x,y) \in \pi$, то $M_1(x,-y) \in \pi \Rightarrow O\overrightarrow{e_1} = Ox$ е **ос на симетрия на *π***.

Ако O е началото на координатната ситема, то $Ox \cap \pi = O$ ($Ox: y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2px = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$). Тоест оста пресича π в точката O, която се нарича **връх** на π.

Сега ще намерим пресечната точка на параболата и оста Oy: $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 2px = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{1,2} = 0$. Тоест $Oy \cap \pi = O(0,0)$, считана два пъти. Oy се нарича **върхова тангента на π**.

Произволна права *l* пресича π в 0, 1 или 2 точки. Ако е в една точка, *l* се нарича **тангента на π**.

Нека върхът $O \in l$, където *l* е върхова тангента. Нека $l: y = kx$. Нека $A = l \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = kx \end{cases} \Rightarrow k^2x^2 = 2px, x \neq 0 \Rightarrow l \cap \pi = A\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right)$. Следователно всяка права през върха сече още веднъж параболата.

Нека е дадена елипсата $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ спрямо подходяща ортонормирана координатна система *K*. Означаваме $c = \frac{e^2p}{1-e^2} > 0$ (тъй като $e < 1, p > 0, e^2 > 0$). Тогава $F^K(-c, 0)$. От друга страна $a^2 - b^2 = \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2e^2}{1-e^2} = \frac{p^2e^2 - p^2e^2 + p^2e^4}{(1-e^2)^2} = \frac{p^2e^4}{(1-e^2)^2} = \left(\frac{e^2p}{1-e^2}\right)^2 = c^2$. Забелязваме също така, че $-\frac{a^2}{c} = -\frac{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}}{\frac{e^2p}{1-e^2}} = -\frac{p}{1-e^2}$, тоест $g^K: x = -\frac{a^2}{c}$. Нека $M(x,y) \in \varepsilon$. Тогава $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2} \Rightarrow y = \zeta\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, където $\zeta = \pm 1$. Тогава намираме $|MF| = \sqrt{(-c - x)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \frac{1}{a}\sqrt{c^2a^2 + 2ca^2x + a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2} = \frac{1}{a}\sqrt{c^2x^2 + 2ca^2x + a^4} = \frac{1}{a}|cx + a^2|$ и $|M, g| = \left|x + \frac{a^2}{c}\right| = \frac{1}{c}|cx + a^2|$. Следователно ексцентритетът е $e = \frac{\frac{1}{a}|cx+a^2|}{\frac{1}{c}|cx+a^2|} = \frac{c}{a}$.

Тъй като е изпълнено уравнението $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $\frac{x^2}{a^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow |x| \leq a$ и $|y| \leq b$. Следователно точките на ε са вътрешни на правоъгълника, образуван от правите $a_1: x = -a, a_2: x = a, b_1: y = -b, b_2: y = b$.

Тъй като в случай, че $M(x,y) \in \varepsilon$, то $M_1(x, -y) \in \varepsilon$ и $M_2(-x, y) \in \varepsilon$. Тогава осите Ox и Oy наричаме **оси на ε**.

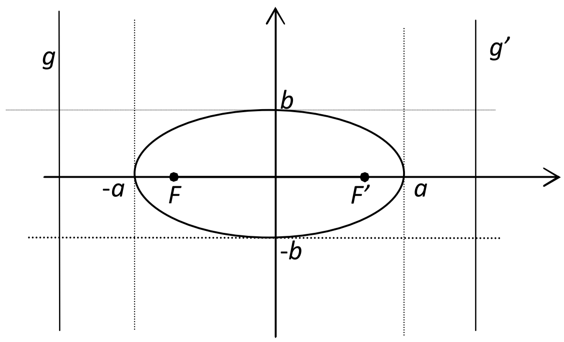
Тъй като и $M_3(-x, -y) \in \varepsilon$, то точката O е **център на симетрия на ε**.

Ще намерим пресечните точки на $Ox \cap \varepsilon = \{A_1, A_2\}$: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$.

Пресечните точки на $Oy \cap \varepsilon = \{B_1, B_2\}$: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B_1(0, b), B_2(0, -b)$. Точките A_1, A_2, B_1, B_2 наричаме **върхове на елипсата ε**.

Нека $a_1: x = -a, a \neq 0$. Търсим $a_1 \cap \varepsilon$: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = -a \end{cases} \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow a_1 \cap \varepsilon = A_1$, считано два пъти. Правата a_1 наричаме **върхова тангента на** $\boldsymbol{\varepsilon}$. Аналогично правите a_2, b_1, b_2 са върхови тангенти.

Ако $|A_1A_2| = 2a, |B_1B_2| = 2b$ и $a > b$. Прието е отсечката A_1A_2 да се нарича **голяма ос**, а B_1B_2 - **малка ос на елипсата** $\boldsymbol{\varepsilon}$.



Нека вземем точката $F'(c,0)$ и правата $g': x = \frac{a^2}{c}$. Тогава $|MF'| = \sqrt{(c-x)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \frac{1}{a}\sqrt{c^2a^2 - 2ca^2x + a^2x^2 + a^2b^2 - b^2x^2} = \frac{1}{a}\sqrt{c^2x^2 - 2ca^2x + a^4} = \frac{1}{a}|cx - a^2|$ и $|M, g'| = \left|x - \frac{a^2}{c}\right| = \frac{1}{c}|cx - a^2|$.

Следователно $\frac{|MF\prime|}{|M,g|} = \frac{c}{a} = e$, тоест *F'* и *g'* също са фокус и директриса на ε.

Освен това $|MF| = \left|\frac{c}{a}x + a\right| = |ex + a|$ и $|MF'| = |ex - a|$. Като вземем предвид, че $e < 1$ и $|x| \leq a$, получаваме $|MF| = a + ex, |MF'| = a - ex$. Така получаваме следното **фокално свойство на елипсата**:

$$|MF| + |MF'| = 2a = const$$

Забележете, че това е дължината на отсечката, която елипсата отрязва от абцисата.

Нека е дадена хипербола $\chi: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ спрямо подходяща ортонормирана координатна система *K*. Означаваме $c = \frac{e^2p}{e^2-1}$. Тогава $a^2 + b^2 = \frac{p^2e^2}{(e^2-1)^2} + \frac{p^2e^2}{e^2-1} = \frac{e^4p^2}{(e^2-1)^2} = c^2$. Освен това имаме $F^K(c,0)$ и $g^K: x = \frac{a^2}{c}$.

Нека точката $M(x,y) \in \chi$. Тогава нейните координати изпълняват уравнението $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, от където следва $\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow |x| \geq a$. Тоест между правите $b_1: x = -a, b_2: x = a$ няма точки от хиперболата. Следователно графиката на хиперболата се състои от два клона.

Ако $M(x,y) \in \chi \Rightarrow M_1(x,-y) \in \chi, M_2(-x,y) \in \chi, M_1(-x,-y) \in \chi$. Следователно осите Ox и Oy са оси на симетрия на χ и се наричат **оси на хиперболата**, а точката *O* – **център на** $\boldsymbol{\chi}$. Като оста Ox наричаме **реална ос**, а Oy - **имагинерна ос**.

Нека $Ox \cap \chi = \{A_1, A_2\} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow \begin{cases} A_1(-a,0) \\ A_2(a,0) \end{cases}$. Точките A_1, A_2 наричаме **върхове на хиперболата**.

Ще потърсим $Oy \cap \chi$: $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow -y^2 = b^2 \Rightarrow b = y = 0$, но $b \neq 0$, следователно графиката на хиперболата не пресича оста Oy.

Нека $b_1 \colon x = -a$. Тогава $\chi \cap b_1 \colon \begin{cases} x = -a \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \chi \cap b_1 = A_1(-a, 0)$, считана два пъти. Правата b_1 наричаме **върхова тангента**. Аналогично правата $b_2 \colon x = a, b_2 \cap \chi = A_2(a, 0)$ също е върхова тангента.

Нека е дадена правата lzO е цънтърът на хиперболата и $l \neq Ox, l \neq Oy$. Тогава $l \cap \chi$: $\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow (b^2 - k^2a^2)x^2 = a^2b^2$. Тогава ако $b^2 - k^2a^2 < 0$, тоест $|k| > \frac{b}{a}$, то правата *l* не пресича хиперболата. Ако $b^2 - k^2a^2 > 0$, тоест $|k| < \frac{b}{a}$, то правата *l* пресича хиперболата в две различни точки. А когато $b^2 - k^2a^2 = 0$, тоест $a_1 \colon y = -\frac{b}{a}x, a_2 \colon y = \frac{b}{a}x$, то правите a_1, a_2 отделят правите, пресичащи хиперболата от тези, които не я пресичат. Тези прави наричаме **асимптоти на хиперболата *χ***.

Можем да изразим координатата *y*: $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2} \Rightarrow y = \eta \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, където $\eta = \pm 1$. Следователно $|MF| = \sqrt{(c-x)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2c^2 - 2a^2cx + (a^2 + b^2)x^2 - a^2b^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 - 2a^2cx + c^2x^2} = \frac{1}{a}|a^2 - cx|$, $|M, g| = \frac{1}{c}|cx - a^2|$ и тогава получаваме ексцентритетът $e = \frac{c}{a}$.

Нека сега разгледаме точката $F'(-c, 0)$ и правата $g' \colon x = -\frac{a^2}{c}$. За тях $|MF'| = \sqrt{(c+x)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2c^2 + 2a^2cx + (a^2 + b^2)x^2 - a^2b^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 + 2a^2cx + c^2x^2} = \frac{1}{a}|a^2 + cx|$, $|M, g| = \frac{1}{c}|cx + a^2|$ и $\frac{|MF\prime|}{|M,g|} = \frac{c}{a} = e$. Следователно тези точка и права също ще са фокус и директриса на хиперболата χ.

Тъй като $e > 1$ и $|x| \geq a$, то $|MF| = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = |a - ex| = ex - a$ и $|MF'| = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = |a + ex| = a + ex$. Тогава $\big||MF| - |MF'|\big| = |ex - a - a - ex| = |2a| = 2a = const$ – **фокално свойство на хиперболата *χ***.