29. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния.

Векторни и параметрични (скаларни) уравнения на права и равнина. Общо уравнение на права в равнината. Декартово уравнение. Взаимно положение на две прави. Нормално уравнение на права. Разстояние от точка до права. Общо уравнение на равнина. Взаимно положение на две равнини. Нормално уравнение на равнина. Разстояние от точка до равнина.

Права g се определя еднозначно от $\begin{cases} M_0 \in g \\ \vec{p} \neq \vec{0}, \vec{p} \parallel g \end{cases}$. Тогава точка M ще лежи върху правата g тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$, тоест когато съществува$\lambda \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p}$. Нека O е произволна фиксирана точка. Тогава $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{p}$. Означаваме $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$. Така получаваме, че $M \in \vec{p} \Leftrightarrow \vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda\vec{p}$ за $\lambda \in (-\infty; +\infty)$. Това уравнение наричаме ***векторно параметрично уравнение на g***. $\vec{r}$ се нарича *текущ радиус-вектор*, а λ е параметър.

Уравнението се удовлетворява от радиус-векторите на точките от правата и само от тях.

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е афинна координатна система. И нека спрямо K са зададени точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3), \vec{p} \neq \vec{0}$. Тогава точката M лежи на правата g, определена от точката M_0 и вектора $\vec{p}$, когато е изпълнено векторното параметрично уравнение. Тогава $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0}(x_0, y_0, z_0)$ и ако $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(x, y, z)$, за да е изпълнено векторното параметрично уравнение, трябва да са изпълнени уравненията:

$$g: \begin{cases} x = x_0 + \lambda p_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 \\ z = z_0 + \lambda p_3 \end{cases}, \qquad \lambda \in (-\infty;\ +\infty)$$

Тези равенства се наричат ***координатни параметрични уравнения на правата*** g спрямо афинната координатна система.

Всяка равнина α се определя еднозначно от точка $M_0 \in \alpha$ и два вектора, компланарни с α ($\vec{p} \parallel \alpha, \vec{q} \parallel \alpha$), където $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не са колинеарни. Така произволна точка M лежи в равнината α тогава и само тогава, когато векторите $\overrightarrow{MM_0}, \vec{p}, \vec{q}$ са компланарни. Тъй като $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са линейно независими, то $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$. Нека O е произволна фиксирана точка и нека $\vec{r} = \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$. Тогава $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$. Тоест α: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$. Това векторно равенство се нарича ***векторно параметрично уравнение на равнина***. $\vec{r}$ се нарича *текущ радиус вектор*. А λ и μ са параметри и са независими един от друг.

Нека Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е афинна координатна система. И нека спрямо K са зададени точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и векторите $\vec{p}(p_1, p_2, p_3), \vec{p} \neq \vec{0}$ и $\vec{q}(q_1, q_2, q_3), \vec{q} \neq \vec{0}$, като при това векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$

са линейно независими. Тоест рангът $r\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = 2$. Точката $M(x, y, z)$ лежи на равнината α тогава и само тогава, когато е изпълнено векторното параметрично уравнение, тоест когато $\begin{cases} x = x_0 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 + \mu q_2 \\ z = z_0 + \lambda p_3 + \mu q_3 \end{cases}$, $\begin{smallmatrix} \lambda \in (-\infty; +\infty) \\ \mu \in (-\infty; +\infty) \end{smallmatrix}$. Тези уравнения се наричат ***координатни параметрични уравнения на равнината α***.

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е афинна координатна система в една равнина. Спрямо нея нека правата *g* да е определена от точката $M_0^K(x_0, y_0)$ и вектора $\vec{p}(p_1, p_2), \vec{p} \neq \vec{0}$, тоест $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$. Точката $M^K(x, y)$ лежи на *g* тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$. От означенията до тук следва, че $\overrightarrow{M_0M}^K(x - x_0, y - y_0)$. Тогава условието $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$ е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p_2(x - x_0) - p_1(y - y_0) = 0$$

$$p_2x - p_1y - (p_2x_0 - p_1y_0) = 0$$

Полагаме $a = p_2, b = p_1, c = -(p_2x_0 - p_1y_0) = -(ax_0 - by_0)$. Тогава

$$M(x, y)\text{z}g \;\Leftrightarrow ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$$

Това равенство наричаме ***общо уравнение на g*** спрямо *K*.

Спрямо една афинна координатна система *K* всяка права има поне едно общо уравнение, което се удовлетворява от координатите спрямо *K* на точките от правата и само от тях. И обратното: *всяко уравнение от този вид е общо уравнение спрямо K на точно една права*.

Доказателство: Нека за определеност $b \neq 0$. Тогава ако точката $M_0(x_0, y_0)$ лежи на правата, то е изпълнено равенството $ax_0 + by_0 + c = 0 \Leftrightarrow by_0 = -ax_0 - c \Leftrightarrow y_0 = -\frac{ax_0 + c}{b}$. Тоест $M_0\left(x_0; -\frac{ax_0 + c}{b}\right)$. Правата е определена от уравнението $g: ax + by + c = 0$, тоест $\vec{p}(-b, a) \parallel g$. Следователно точката $M(x, y)$ лежи на правата тогава и само тогава, когато $\begin{vmatrix} x - x_0 & y + \frac{ax_0 + c}{b} \\ -b & a \end{vmatrix} = 0$. Означаваме $-b = p_1, a = p_2 \Rightarrow \vec{p}(p_1, p_2) \parallel g$.

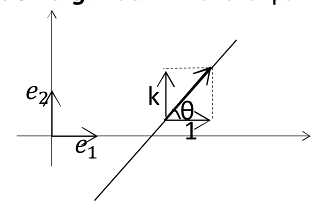
Нека разгледаме правата $g_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Нека векторът $\vec{q}(q_1, q_2) \parallel g_1 \parallel g$. Тогава ще докажем, че тази права g_1 съвпада с правата *g*, когато $M_0(x_0, y_0) \in g_1$. След като $\vec{q}(q_1, q_2) \parallel g_1 \parallel g \parallel \vec{p}(p_1, p_2)$, то $\vec{q} = k\vec{p}, k \neq 0$ за някое *k*. Освен това от компланарността на $\vec{q}$ с правата q_1, следва че $q_1 = -b_1, q_2 = a$. Но $q_1 = kp_1 \Rightarrow -b_1 = k(-b) \Rightarrow b_1 = kb$ и $q_2 = kp_2 \Rightarrow a_1 = kb_1$. Тогава $g_1: kax + kbx + c_1 = 0$. От условието, че $M_0(x_0, y_0)$ лежи на правата *g* следва, че $ax_0 + by_0 + c = 0 \Rightarrow c = -ax_0 - by_0$. А от условието, че $M_0(x_0, y_0)$ лежи на правата g_1 следва, че $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -a_1x_0 - b_1y_0 = -kax_0 - kby_0 = -k(ax_0 + by_0) = kc$. Уравненията $ax + bx + c = 0$ и $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ са уравнения на една и съща права тогава и само тогава, когато $r\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow r\begin{pmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \end{pmatrix} = 1$, което е изпълнено. Тоест правите g и g_1 съвпадат, с което доказахме, че общото уравнение на една права е уравнение на точно една права.

29. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния.

Нека $g \nparallel O\overrightarrow{e_2}\,(Oy)$. Тогава $g: ax + by + c = 0 \Leftrightarrow g: y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Означаваме $k = -\frac{a}{b}$ и $n = -\frac{c}{b}$. Получаваме

$$g: y = kx + n$$

Тази форма на общо уравнение се нарича ***декартово уравнение на g***. Различното е фактът, че не всяка права има декартово уравнение.



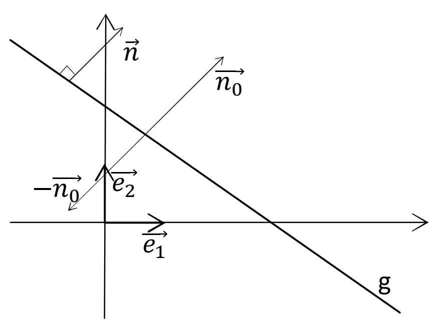
Векторът $\vec{p}(1,k) \parallel g$: $\vec{p} \in \{y > 0\}$, тоест на полуравнината, определена от оста Oy, където $y > 0$. Тогава ако $\theta = \sphericalangle(\vec{p}, \overrightarrow{e_1})$, то $cos\sphericalangle\theta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, sin\sphericalangle\theta = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow tg\sphericalangle\theta = k$. Тоест $k = tg\sphericalangle(\vec{p}, \overrightarrow{e_1})$ наричаме *ъглов коефициент на декартовото уравнение на права при ортонормирана координатна система.*

Спрямо афинната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ нека са зададени правите $g_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $g_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, където $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$; $i = 1, 2$. Тогава $g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow$ системата няма решение за (x, y)

$$\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array} \right.$$

Тоест ***правите са успоредни***, когато $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_2 = ka_1 \\ b_2 = kb_1 \end{array} \right.$. Когато освен това $c_2 = kc_1$, то $g_1 \equiv g_2$.

Ако $\Delta \neq 0$, то двете ***прави се пресичат*** в някаква точка.



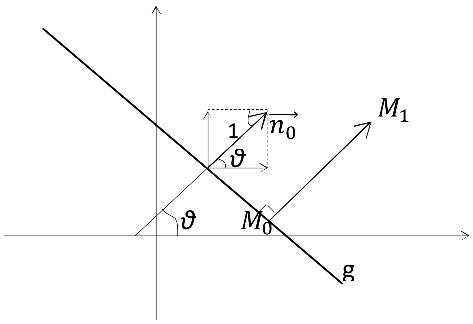
Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ е ортонормирана координатна система. И нека спрямо нея е дадена правата $g: ax + by + c = 0, a^2 + b^2 \neq 0$. Тогава векторът $\vec{p}(-b, a) \parallel g$. Да разгледаме вектора $\vec{n}(a, b)$. $\vec{p}\vec{n} = 0$. Следователно $\vec{p} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n} \perp g$. $\vec{n}$ наричаме *нормален вектор* на правата *g*.

Ако дължината на нормалния вектор на права *g* е 1 ($|\vec{n}| = 1$), то $g: ax + by + c = 0$ наричаме ***нормално уравнение на правата g.***

Така за да бъде общото уравнение на правата нормално уравнение, искаме $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.

Ако $\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{n_0} \perp g \\ |\overrightarrow{n_0}| = 1 \end{array} \right.$, то $\left| \begin{array}{l} -\overrightarrow{n_0} \perp g \\ |-\overrightarrow{n_0}| = 1 \end{array} \right.$ (векторът $\overrightarrow{n_0}$ наричаме *единичен нормален вектор на g*). Тоест всяка права има точно две нормални уравнения. Тъй като $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, то $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{n}$. Така получаваме, че двете нормални уравнения на *g* се получават от общото й уравнение по следния начин $g: \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$.

29. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния.



Тъй като $|\overrightarrow{n_0}| = 1$, то съществува ъгъл $\vartheta \in [0, 2\pi)$, такъв че $\overrightarrow{n_0}(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$. Тоест нормалното уравнение на g е $\cos\vartheta\, x + \sin\vartheta\, y + l = 0$.

Нека $M_1(x_1, y_1)$ не лежи на g. Ще търсим разстоянието от точката M_1 до правата g. Построяваме точка $M_0\colon \begin{cases} M_0 z g \\ M_1 M_0 \perp g \end{cases}$. Нека означим с $d = |M_1, g| = |M_1 M_0|$. Тъй като $\overrightarrow{n_0} \perp g$ и $\overrightarrow{M_0 M_1} \perp g$, то $\overrightarrow{n_0} \parallel \overrightarrow{M_0 M_1} \Rightarrow \overrightarrow{M_0 M_1} = \delta \overrightarrow{n_0}$. Нека $M_0(x_0, y_0)$. Тогава от колинеарността на векторите следва:

$$\left| \begin{matrix} x_1 - x_0 = \delta\cos\vartheta \\ y_1 - y_0 = \delta\sin\vartheta \end{matrix} \right. \Rightarrow \left| \begin{matrix} x_0 = x_1 - \delta\cos\vartheta \\ y_0 = y_1 - \delta\sin\vartheta \end{matrix} \right.$$

Но знаем, че $M_0 z g \Rightarrow \cos\vartheta\,(x_1 - \delta\cos\vartheta) + \sin\vartheta\,(y_1 - \delta\sin\vartheta) + l = 0$

$$\Rightarrow \cos\vartheta\, x_1 - \delta\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\, y_1 - \delta\sin^2\vartheta + l = 0$$

$$\Rightarrow (\cos\vartheta\, x_1 + \sin\vartheta\, y_1 + l) - \delta = 0 \Rightarrow \delta = \cos\vartheta\, x_1 + \sin\vartheta\, y_1 + l$$

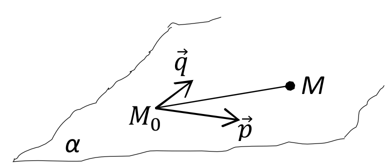
$$d = |M_0 M_1| = |\delta|\, \underbrace{|\overrightarrow{n_0}|}_{=1} = |\delta| = |\cos\vartheta\, x_1 + \sin\vartheta\, y_1 + l|$$

Това е начинът, по който можем да намерим разстоянието от една точка до правата, зададена с нормално уравнение.

При дадена права с общо уравнение $g\colon ax + by + c = 0$ в ортонормирана координатна система и точка $M_1(x, y)$, нележаща на правата, намираме ***разстоянието между точката и правата*** по следната формула:

$$d(M_1, g) = \left| \frac{a x_1 + b y_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Нека $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е афинна координатна система. И нека в нея е зададена равнината $\alpha\colon \begin{cases} M_0^K(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{p}^K(p_1, p_2, p_3) \\ \vec{q}^K(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$, $\vec{p}, \vec{q}$ са линейно независими и различни от нулевия вектор.



Нека $M(x, y, z) z \alpha$. Тогава векторите $\overrightarrow{M_0 M}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са компланарни и следователно са линейно зависими. Тъй като $\overrightarrow{M_0 M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, то трябва

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(p_2 q_3 - p_3 q_2)x + (p_3 q_1 - p_1 q_3)y + (p_1 q_2 - p_2 q_1)z - \big((p_2 q_3 - p_3 q_2)x_0 + (p_3 q_1 - p_1 q_3)y_0 + (p_1 q_2 - p_2 q_1)z_0\big) = 0$$

Означаваме с $A = p_2 q_3 - p_3 q_2$, $B = p_3 q_1 - p_1 q_3$, $C = p_1 q_2 - p_2 q_1$ и $D = -(A x_0 + B y_0 + C z_0)$. Тогава точката $M(x, y, z)$ лежи на α тогава и само тогава, когато $Ax + By + Cz + D = 0$. Това уравнение наричаме ***общо уравнение на равнината*** спрямо K. Ще докажем, че поне едно от

A, B и C трябва да е различно от нула. При $A = B = C = 0$ ако $\vec{p} = \vec{0}$, ще достигнем до противоречие с условието. Затова нека $A = B = C = 0$ и $\vec{p} \neq \vec{0}$. Тогава поне едно от p_1, p_2, p_3 ще е различно от 0. За определеност нека вземем, че $p_3 \neq 0$. Тъй като $\vec{q} \neq \vec{0}$, то поне едно от q_1, q_2, q_3 ще е различно от нула и нека това е q_3. От $A = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{q_3}{p_3} p_2$, $B = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{q_3}{p_3} p_1$. Означаваме $\frac{q_3}{p_3} = k \neq 0$. Тогава получаваме следното: $q_2 = kp_2, q_1 = kp_1, q_3 = kp_3 \Rightarrow \vec{q} = k\vec{p}$, с което достигаме до противоречие с неколинеарността на двата вектора. Следователно поне едно от A, B и C трябва да е различно от нула.

Сега ще докажем, че всяко уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$ с $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ е уравнение спрямо K на точно една равнина. За определеност нека вземем, че $C \neq 0$. Тогава тройките $\left(x, y, -\frac{Ax+By+D}{C}\right)$ ще удовлетворяват уравнението. Нека $M_1\left(0,0,-\frac{D}{C}\right), M_2\left(1,0,-\frac{A+D}{C}\right), M_3\left(0,1,-\frac{B+D}{C}\right)$. Тогава $\overrightarrow{M_1M_2}\left(1,0,-\frac{A}{C}\right), \overrightarrow{M_1M_3}\left(0,1,-\frac{B}{C}\right)$.Следователно $\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \overrightarrow{M_1M_3}$, което означава, че точките M_1, M_2, M_3 са неколинеарни. Тогава те еднозначно определят равнината α, която минава през тях:

$$\alpha: \begin{cases} \mathrm{M}_1 \mathrm{z} \alpha \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \\ \parallel \overrightarrow{M_1M_3} \end{cases} \Rightarrow \alpha: \begin{vmatrix} x & y & z + \dfrac{D}{C} \\ 1 & 0 & -\dfrac{A}{C} \\ 0 & 1 & -\dfrac{B}{C} \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha: \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + z + \frac{D}{C} = 0 \Leftrightarrow \alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

Така вече доказахме следната теорема:

<u>Теорема:</u> Спрямо афинна координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ всяка равнина има общо уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ и обратното: всяко уравнение от този вид е общо уравнение спрямо K на точно една равнина.

<u>Условие за компланарност на вектор и равнина:</u> Спрямо афинната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ е дадена равнината $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ и векторът $\vec{l}(\lambda, \mu, \nu)$. Тогава $\vec{l} \parallel \alpha \Leftrightarrow A\lambda + B\mu + C\nu = 0$.

Доказателство: Нека точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежи на равнината α. И нека $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{l}$, където $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогава $\vec{l} \parallel \alpha \Leftrightarrow M_1$ лежи в равнината α. Тъй като $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = \vec{l}(\lambda, \mu, \nu) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 - x_0 = \lambda \\ y_1 - y_0 = \mu \\ z_1 - z_0 = \nu \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = x_0 + \lambda \\ y_1 = y_0 + \mu \\ z_1 = z_0 + \nu \end{array} \right.$. От условието, че $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежи на равнината α, получаваме $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Искаме $\vec{l} \parallel \alpha \Leftrightarrow M_1 z \alpha \Leftrightarrow A(\lambda + x_0) + B(\mu + y_0) + C(\nu + z_0) + D = 0 \Leftrightarrow A\lambda + B\mu + C\nu + \left(\underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}_{=0}\right) = 0 \Leftrightarrow A\lambda + B\mu + C\nu = 0$, с което доказахме твърдението.

Спрямо афинната координатна система $K = O\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ нека са зададени равнините $\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0;\ A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 \neq 0, i = 1{,}2$.

$\alpha \parallel \beta$ (или $\alpha \equiv \beta$) тогава и само тогава, когато за произволен вектор $\vec{l}(\lambda, \mu, \nu) \parallel \alpha$ имаме и че $\vec{l} \parallel \beta$. За целта ще разгледаме следната линейна хомогенна система за λ, μ, и ν:

$$\begin{vmatrix} A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu = 0 \\ A_2\lambda + B_2\mu + C_2\nu = 0 \end{vmatrix}$$

Тя трябва да има две линейно независими и нетривиални решения, тъй като ако съществуват два линейно зависими вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, за които $\vec{p} \parallel \alpha$ и $\vec{p} \parallel \beta$, то винаги $\vec{q} \parallel \alpha$ и $\vec{q} \parallel \beta$ и при това и всеки вектор, който е тяхна линейна комбинация ще е компланарен и с двете равнини. За да има две линейно независими решения системата трябва да е изпълнено следното: $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$ (теорема на Руше) $\Rightarrow \exists k \neq 0: A_2 = kA_1, B_2 = kB_1, C_2 = kC_1$. За да бъдат **двете равнини успоредни или да съвпадат** е необходимо $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$, тоест $\exists k \neq 0: A_2 = kA_1, B_2 = kB_1, C_2 = kC_1$. Ако искаме тези равнини да съвпадат, трябва освен това условие да съществува точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, която да лежи и в двете равнини. От принадлежането й към равнината α следва: $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \Leftrightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 = -D_1$. Освен това трябва да е изпълнено и: $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \Rightarrow kA_1x_0 + kB_1y_0 + kC_1z_0 + D_2 = 0 \Rightarrow -kD_1 + D_2 = 0 \Rightarrow D_2 = kD_1$. Така доказахме, че за да **съвпадат две равнини** е необходимо $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1$. **Две равнини ще са несъвпадащи и успоредни**, когато $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$ и $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2$. Във всички останали случаи **двете равнини се пресичат**: $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$.

Нека $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ е ортонормирана координатна система. Спрямо K е зададена равнината $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Да разгледаме вектора $\vec{N}^\alpha(A, B, C)$. Нека $\vec{l}(\lambda, \mu, \nu) \parallel \alpha$, тоест $\lambda A + \mu B + \nu C = 0$. Тогава $\vec{N}^\alpha.\vec{l} = A\lambda + B\mu + C\nu = 0$, тоест $\vec{N}^\alpha \perp \vec{l}$. Но тъй като $\vec{l} \parallel \alpha$, то $\vec{N}^\alpha \perp \alpha$. Векторът $\vec{N}^\alpha(A, B, C)$ наричаме **нормален вектор на равнината α**.

Когато $|\vec{N}^\alpha| = 1$, тоест $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, уравнението $Ax + By + Cz + D = 0$ се нарича **нормално уравнение на равнината**.

Следователно всяка равнина α има точно две нормални уравнения, които се получават от общто уравнение по следния начин:

$$\alpha\colon \pm\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Нека спрямо $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$ е дадена равнината $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 = 1$ и точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, нележаща на равнината. Ще търсим растоянието $d(M_0, \alpha) = |M_0M_1|$, където точката $M_1: \begin{cases} M_1 z\alpha \\ M_0M_1 \perp \alpha \end{cases}$. Щом като $M_0M_1 \perp \alpha$, то $\overrightarrow{M_1M_0} \parallel \vec{N}^\alpha$. Знаем, че $\vec{N}^\alpha(A, B, C)$ и $|\vec{N}^\alpha| = 1$. Нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогава $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Но от доказаното до тук имаме, че $\overrightarrow{M_1M_0} \parallel \vec{N}^\alpha$, тоест $\overrightarrow{M_0M_1} = \delta\vec{N}^\alpha \Rightarrow |\overrightarrow{M_0M_1}| = |\delta|.\underbrace{|\vec{N}^\alpha|}_{=1} = |\delta|$. От друга страна от $\overrightarrow{M_0M_1} = \delta\vec{N}^\alpha$, следва че

29. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния.

$$\left|\begin{array}{l} x_1 - x_0 = \delta A \\ y_1 - y_0 = \delta B \\ z_1 - z_0 = \delta C \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = x_0 + \delta A \\ y_1 = y_0 + \delta B \\ z_1 = z_0 + \delta C \end{array}\right.$$

Но тъй като точката M_1 лежи на равнината α, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, тоест $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + \delta\left(\underbrace{A^2 + B^2 + C^2}_{=1}\right) + D = 0 \Rightarrow \delta = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)$. Тоест **разстоянието между точката и равнина, зададена с нормалното й уравнение,** е $d(M_0, \alpha) = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|$.

Ако равнината $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 1$, то **разстоянието между точката и равнината** е $d(M_0, \alpha) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$.