***Операционна семантика на логическите програми.***

**Субституция** наричаме изображение σ на множеството на променливите **Ξ** в множеството на термовете, такова че

σ (*x*) ≠ *x* най-много за краен брой променливи.

Ако *x*1, *x*2, …, *x*n са две по две различни променливи и u1, u2, …, un са термове, то със [*x*1/u1, *x*2/u2, …, *x*n/un] означаваме субституцията σ, определена по следния начин: σ (*x*i) = ui,

i = 1, 2, …, n, σ (*x*) = *x* за *x* ∉ { *x*1, *x*2, …, *x*n}.

Очевидно, всяка субституция се представя чрез такъв краен израз и то по безброй много начини.

**Тъждествената субституция** бележим с ι, ι (*x*) = *x* за всяко *x* ∈ **Ξ**.

Например, ι = [*x*/*x*], където *x* е произволна променлива.

Нека T е терм, σ е субституция. Дефинираме индуктивно термът Tσ, който ще наричаме **резултат от прилагането** на σ към T.

База: Ако T ∈ **Ф0**, то Tσ = T. Ако T ∈ **Ξ**, Tσ = σ (T).

Предположение: Нека T = f (T1, T2, …, Tn) и T1σ, T2σ, …, Tnσ са дефинирани.

Стъпка: Тогава Tσ = f (T1σ, T2σ, …, Tnσ).

**Твърдение:** Нека T е терм. Ако σ и τ са субституции, които съвпадат върху VAR (T), то Tσ = Tτ.

Доказателство: Индукция по построението на T.

**Tвърдение:** Нека T е терм. Тогава Tι = T.

Доказателство: Индукция по построението на T.

**Твърдение:** Ако T е затворен терм, то Tσ = T за всяка

субституция σ.

Доказателство: Нека σ е произволна субституция. Тогава σ и ι съвпадат върху VAR (T) = ∅ 🡺 Tσ = Tι = T.

**Твърдение:** Нека T е терм, σ е субституция.

Тогава VAR (Tσ) = .

Доказателство: Индукция по построението на T.

**Следствие:** Нека T е терм, σ е субституция. Тогава термът Tσ е затворен ⬄ термът σ (*x*) е затворен терм за всяко *x* ∈ VAR (T).

Доказателство: Директно от твърдението.

Нека F е безкванторна формула, σ е субституция. Дефинираме индуктивно безкванторната формула Fσ, която ще наричаме **резултат от прилагането** на σ към F.

База: Ако F е атомарна формула, F = p (T1, …, Tn) дефинираме

Fσ = p (T1σ, …, Tnσ). Ако F ∈ **П0**, то Fσ = F.

Ако F = true или F = fail, дефинираме Fσ = F.

Предположение: Нека G, F1, …, Fn (n > 1) са безкванторни формули и Gσ, F1σ, …, Fnσ са дефинирани.

Стъпка: Ако F = ¬G, дефинираме Fσ = ¬(Gσ).

Ако F = F1 & F2 & … & Fn, дефинираме Fσ = F1σ & F2σ & …& Fnσ.

Ако F = F1 ∨ F2 ∨ … ∨ Fn, дефинираме Fσ = F1σ ∨ F2σ ∨ …∨ Fnσ.

**Твърдение:** Нека F е безкванторна формула. Ако σ и τ са субституции, които съвпадат върху VAR (F), то Fσ = Fτ.

Доказателство: Индукция по построението на F.

**Твърдение:** Нека F е безкванторна формула. Тогава Fι = F.

Доказателство: Индукция по построението на F.

**Твърдение:** Ако F е безкванторна формула и σ е субституция, то

VAR (Fσ) = .

Доказателство: Индукция по построението на F.

**Следствие:** Нека F е безкванторна формула, σ е субституция. Тогава формулата Fσ е затворена ⬄ термът σ (*x*) е затворен терм за всяко *x* ∈ VAR (T).

Доказателство: Директно от твърдението.

**Твърдение:** Нека Е е терм или безкванторна формула. Ако σ и τ са такива субституции, че Eσ = Eτ, то σ и τ съвпадат върху VAR (E).

Доказателство: Ще разгледаме само случая когато E е терм. За безкванторните формули разсъжденията са абсолютно аналогични.

Провеждаме индукция по постронието на E.

База: Нека σ и τ са такива субституции, че Eσ = Eτ.

Ако E е константа, то очевидно σ и τ съвпадат върху

VAR (E) = ∅. Ако E ∈ **Ξ**, то Eσ = σ (E), Eτ = τ (E) 🡺 σ (E) = τ (E) 🡺

σ и τ съвпадат върху VAR (E) = { E}.

Предположение: Нека E = f (T1, T2, …, Tn) и твърдението е изпълнено за термовете T1, T2, …, Tn.

Стъпка: Нека σ и τ са субституции, такива че Eσ = Eτ.

Имаме Eσ = f (T1σ, T2σ, …, Tnσ), Eτ = f (T1τ, T2τ, …, Tnτ). От еднозначния синтактичен анализ на термовете получаваме

T1σ = T1τ, T2σ = T2τ, …, Tnσ = Tnτ. Използваме индукционното предположение за термовете T1, T2, …, Tn и получаваме, че

σ и τ съвпадат върху VAR (T1), VAR (T2), …, VAR (Tn). Тогава

σ и τ съвпадат върху VAR (T1) ∪ VAR (T2) ∪ … ∪ VAR (Tn) = VAR (E).

Нека σ1 и σ2 са субституции. Дефинираме функция σ (*x*) от множеството **Ξ** на променливите в множеството от всички термове по следния начин: σ (*x*) = (*x*σ1)σ2 за всяко *x* ∈ **Ξ**.

Ще покажем, че σ (*x*) е субституция, т.е. σ (*x*) ≠ *x* най-много за краен брой променливи *x*. За целта ще покажем, че за всяко *x* ∈ **Ξ** ако σ (*x*) ≠ *x*, то σ1 (*x*) ≠ *x* или σ2 (*x*) ≠ *x*. Да допуснем противното –

σ (*x*) ≠ *x* и σ1 (*x*) = *x*, σ2 (*x*) = *x* за някоя променлива *x* ∈ **Ξ**. Тогава

σ (*x*) = (*x*σ1)σ2 = *x*σ2 = *x*, което е противоречие. Ясно е, че

σ1 (*x*) ≠ *x* или σ2 (*x*) ≠ *x* е изпълнено само за краен брой

променливи *x*, тъй като σ1 и σ2 са субституции. Така σ (*x*) ≠ *x* само за краен брой променливи *x*, т.е. σ (*x*) е субституция. Тази субституция наричаме **произведение** на субституциите σ1 и σ2, означаваме σ = σ1σ2. Така по дефиниция *x*(σ1σ2) = (*x*σ1)σ2.

Ще покажем, че σι = ισ = σ за всяка субституция σ.

Действително, за всяко *x* ∈ **Ξ** имаме *x*(σι) = (*x*σ)ι = *x*σ (от съответното твърдение за термове) 🡺 σι = σ. Също, за всяко *x* ∈ **Ξ** имаме *x*(ισ) = (*x*ι)σ = *x*σ 🡺 ισ = σ.

Ясно е, че умножението на субституции не е комутативно.

**Твърдение:** Ако E е терм или безкванторна формула и σ1, σ2 са субституции, то E(σ1σ2) = (Eσ1)σ2.

Доказателство: Разглеждат се отделно случаи първо за терм и след това за безкванторна формула, като и в двата случая се провежда тривиална индукция.

**Твърдение (асоциативност на умножението на субституции):** За всеки три субституции σ1, σ2, σ3 е изпълнено: (σ1σ2)σ3 = σ1(σ2σ3).

Доказателство: Нека *x* ∈ **Ξ**.

Тогава *x* ((σ1σ2)σ3) = (*x*(σ1σ2))σ3 = ((*x*σ1)σ2)σ3.

Също *x* (σ1(σ2σ3)) = (*x*σ1)(σ2σ3) = ((*x*σ1)σ2)σ3. Тук използваме горното твърдение за терма (*x*σ1).

Така *x* ((σ1σ2)σ3) = *x* (σ1(σ2σ3)) за всяко *x* ∈ **Ξ** 🡺 (σ1σ2)σ3 = σ1(σ2σ3).

Нека F е произволна безкванторна формула. **Частни случаи** на формулата F наричаме всички формули от вида Fσ, където σ е произволна субституция.

Например, всяка безкванторна формула F е частен случай на себе си, тъй като F = Fι. Ако F е затворена безкванторна формула, то

F е единственият частен случай на F, тъй като Fσ = F за всяка субституция σ. Напротив, ако F не е затворена, то е ясно, че F има и други частни случаи, дори безброй много.

Релацията “е частен случай на” е транзитивна: Ако G е частен случай на F и H е частен случай на G, то H е частен случай на F.

Действително по условие G = Fσ1, H = Gσ2 🡺 H = (Fσ1)σ2 = F (σ1σ2), т.е. H е частен случай на F.

Нека F е безкванторна формула. **Вариант** на F наричаме такъв частен случай G на F, такъв че F е частен случай на G.

С други думи, релацията “е вариант на” е симетричното затваряне на релацията “е частен случай на”. В такъв случай е очевидно, че

релацията “е вариант на” в множеството от всички безкванторни формули е релация на еквивалентност.

Ако F е затворена формула, то F е единственият вариант на F, тъй като F е единственият частен случай на F.

Напротив, ако F е безкванторна формула, която не е затворена, то тя има безброй много варианти, както се вижда от следното

**Твърдение:** Нека F е безкванторна формула, която не е затворена.

Нека VAR (F) = { *x*1, *x*2, …, *x*n}, n ≥ 1, *x*i ≠ *x*j при i ≠ j ∈ { 1, 2, …, n}.

Нека *y*1, *y*2, …, *y*n са две по две различни променливи.

Ако σ = [*x*1/*y*1, *x*2/*y*2, …, *x*n/*y*n], то G = Fσ е вариант на F.

Доказателство:

Очевидно G е частен случай на F. Ще покажем, че F е частен случай на G. Да разгледаме субституцията

σ′ = [*y*1/*x*1, *y*2/*x*2, …, *y*n/*x*n] – тя е коректно зададена, тъй като

*y*i ≠ *y*j при i ≠ j ∈ { 1, 2, …, n}. Ще покажем, че F = Gσ′.

Имаме Gσ′ = (Fσ)σ′ = F (σσ′).

За i = 1, 2, …, n имаме: *x*i (σσ′) = (*x*iσ)σ′ = *y*iσ′ = *x*i.

Така σσ′ и ι съвпадат върху VAR (F) 🡺 F (σσ′) = Fι = F.

Така Gσ′ = F и G е вариант на F.

Тъй като множеството **Ξ** е безкрайно, по посочения начин можем да построим безброй много варианти на F. Дори можем да построим вариант на F, който не съдържа променливи от дадено крайно подмножество на **Ξ**.

**Твърдение:** Нека F е безкванторна формула, която не е затворена. Нека VAR (F) = { *x*1, *x*2, …, *x*n}, n ≥ 1, *x*i ≠ *x*j при i ≠ j ∈ { 1, 2, …, n}.

Нека G е произволен вариант на F. Тогава

G = F[*x*1/*y*1, *x*2/*y*2, …, *x*n/*y*n], за някои променливи *y*1, *y*2, …, *y*n, които са две по две различни помежду си.

Доказателство: Тъй като G е вариант на F, то G = Fσ, F = Gσ′ за някои субституции σ и σ′. Тогава F = Gσ′ = (Fσ)σ′ = F (σσ′) 🡺

ι и σσ′ съвпадат върху VAR (F), т.е. *x*i (σσ′) = *x*i, i = 1, 2, …, n.

Да допуснем, че *x*iσ е съставен терм. Тогава *x*i (σσ′) = (*x*iσ)σ′ също е съставен терм, тъй като след прилагането на субституцията σ′,

(*x*iσ)σ′ отново ще съдържа функционални символи. Така

*x*i = (*x*iσ)σ′ е съставен терм, което е противоречие тъй като съставните термове са различни от променливите.

Да допуснем, че *x*iσ е константа. Тогава *x*i = (*x*iσ)σ′ = *x*iσ, което е противоречие, тъй като множествата **Ф0** и **Ξ** не се пресичат.

Така *x*iσ е променлива, нека *x*iσ = *y*i ∈ **Ξ.** Тогава

σ и [*x*1/*y*1, *x*2/*y*2, …, *x*n/*y*n] съвпадат върху VAR (F) 🡺

G = Fσ = F [*x*1/*y*1, *x*2/*y*2, …, *x*n/*y*n]. Ако допуснем, че за някои

i ≠ j ∈ { 1, 2, …, n} имаме *y*i = *y*j 🡺 *x*iσ = *x*jσ 🡺

(*x*iσ)σ′ = (*x*jσ)σ′ 🡺 *x*i = *x*j, което е противоречие. Така *y*1, *y*2, …, *y*n са две по две различни помежду си.

Нека A и B са произволни атомарни формули. Въпросът, който ще разглеждаме е съществува ли атомарна формула, която е частен случай както на A, така и на B, т.е. съществуват ли субституции

α, β, такива че Aα = Bβ.

**Унификатор** на атомарните формули A и B наричаме

субституция σ, такава че Aσ = Bσ. Ако A и B притежават унификатор, казваме че A и B са **унифицируеми**.

Ако A и B са унифициеруеми, очевидно съществува атомарна формула, която е частен случай на A и на B. Обратното в общия случай не е вярно. Вярно е, обаче, следното

**Твърдение:** Нека A и B са атомарни формули, такива че

VAR (A) ∩ VAR (B) = ∅. Ако съществува атомарна формула, която е частен случай на A и на B, то A и B са унифицируеми.

Доказателство: По условие съществуват субституции α, β такива че

Aα = Bβ. Разглеждаме изображението σ от **Ξ** в множеството на всички термове, σ (*x*) = α (*x*), ако *x* ∈ VAR (A), σ (*x*) = β (*x*), ако

*x* ∈ **Ξ**\VAR (A). Ясно е, че σ е субституция, тъй като σ (*x*) ≠ *x*

най-много за променливите от VAR (A) ∪ VAR (B), които са краен брой. Тъй като σ и α съвпадат върху VAR (A), то Aα = Aσ.

Също, тъй като VAR (A) ∩ VAR (B) = ∅ 🡺 VAR (B) ⊂ **Ξ**\VAR (A) 🡺

σ и β съвпадат върху VAR (B) 🡺 Bβ = Bσ.

Така σ е унификатор на A и B.

Нека A и B са произволни атомарни формули. Както знаем, съществува вариант B′ на B, такъв че VAR (A) ∩ VAR (B′) = ∅.

Ясно е, че B′ и B имат едни и същи частни случаи. Тогава една атомарна формула е частен случай на A и на B ⬄ тя е частен случай на A и на B′. От горното твърдение, тъй като

VAR (A) ∩ VAR (B′) = ∅, то съществува атомарна формула, която е частен случай на А и на B ⬄ A и B′ са унифицируеми.

От доказателството на твърдението заключаваме, че общият вид на атомарните формули, които са частни случаи на A и на B

е Aσ, където σ е унификатор на A и на B′.

Нека A и B са атомарни формули.

Ако A и B имат различни предикатни символи или предикатни символи с различен брой аргументи, то очевидно A и B не са унифицируеми.