

ТЕМА 14

Операционна семантика на логическите програми

ВУЗ: Софийски Университет
Факултет: ФМИ
Специалност: Информатика
Конспект: 2004 г.
Автор: Иван Стамболийски

Използвана литература:

1. Записки по Логическо програмиране от Димитър Скордев

Съдържание:

12.1. Субституции.....	2
12.2. Унификатори и унифицируемост.....	4

12.1. Субституции

Под *субституция* ще разбираме такава функция s с дефиниционна област множеството X на всички променливи и със стойности в множеството $\mathbf{H}'$ на термовете, че равенството $s(X)=X$ да е нарушено най-много за краен брой променливи X . Ако $X_1, \dots, X_m$ са различни помежду си променливи, а $U_1, \dots, U_m$ са термове, то ще означаваме със знака $[U_1, \dots, U_m =: X_1, \dots, X_m]$ субституцията s , определена по следния начин: $s(X_i)=U_i$ при $i=1, \dots, m$ и $s(X)=X$ за всяка променлива X , различна от $X_1, \dots, X_m$; с това улавяне ще си служим и при $m=0$, тъй че с $[=:]$ ще означаваме тъждественото изображение на множеството X в себе си – това изображение ще наричаме *тъждествена субституция*. При $m>0$ означението $[U_1, \dots, U_m =: X_1, \dots, X_m]$ ще четем " $U_1, \dots, U_m$ вместо $X_1, \dots, X_m$ ".

Нека s е дадена субституция. Като използваме еднозначното прочитане на термовете, можем да дефинираме индуктивно едно изображение d на $\mathbf{H}'$ в $\mathbf{H}'$ по следния начин:

- а) $d(X)=s(X)$ за всяка променлива X ;
- б) $d(c)=c$ за всяка константа c ;
- в) $d(f(T_1, T_2, \dots, T_n))=f(d(T_1), d(T_2), \dots, d(T_n))$ при $n>0, f \in F_n, T_1, T_2, \dots, T_n \in \mathbf{H}'$.

За произволен терм T съответния му терм $s(T)$ ще наричаме *резултат от прилагане на s към T* (интуитивно въпросният резултат може да се схваща като получен чрез заместване на променливите в T със съответните им стойности на s). Благодарение на точка а) от дефиницията на изображението d то е продължение на изображението s . Това позволява без опасност от недоразумение в бъдеще да означаваме терма $d(T)$ със $s(T)$. При такъв начин на означаване равенствата от точки б) и в) от същата дефиниция добиват съответно вида $s(c)=c$ и вида

$$s(f(T_1, T_2, \dots, T_n))=f(s(T_1), s(T_2), \dots, s(T_n)).$$

След като вече дефинирахме какво разбираме под резултат от прилагане на дадена субституция s към произволен терм, лесно се дефинира и *резултат от прилагане на s към произволна атомарна формула*, като този резултат е пак атомарна формула. Дефиницията е следната: когато $p \in P_0$, приемаме, че резултатът от прилагането на s към p е p , а когато n е положително цяло число, $p \in P_n$ и $T_1, T_2, \dots, T_n$ са термове, за резултат от прилагането на s към $p(T_1, T_2, \dots, T_n)$ считаме атомарната формула $p(s(T_1), s(T_2), \dots, s(T_n))$ (дефиницията е коректна благодарение на еднозначното прочитане на атомарните формули). Да отбележим, че ако се случи една атомарна формула да бъде същевременно и терм, то току-що дадената дефиниция ще даде същия резултат, какъвто би дала в случая и дефиницията за прилагане на субституция към терм. Благодарение на това ние без опасност от недоразумение ще означаваме резултата от прилагането на s към произволна атомарна формула A със $s(A)$. Като използваме това означение, можем да запишем, че $s(p)=p$ за всеки нулместен предикатен символ p и имаме равенството

$$s(p(T_1, T_2, \dots, T_n))=p(s(T_1), s(T_2), \dots, s(T_n))$$

при $n>0, p \in P_n, T_1, T_2, \dots, T_n \in \mathbf{H}'$.

Нека s е субституция, а G е дадена цел. *Резултат от прилагането на s към G* ще наричаме целта, която се получава от G чрез прилагане на s поотделно към членовете на G . Ще означаваме този резултат със $s(G)$. Най-сетне, ако е дадена една клауза C с глава H и тяло B , то *резултат от прилагането на s към C* ще наричаме клаузата с глава $s(H)$ и тяло $s(B)$; ще я означаваме със $s(C)$.

Сега ще изкажем няколко твърдения, описващи общи свойства на прилагането на субституции към термове, към атомарни формули, към цели и към клаузи. Споменатите твърдения се доказват най-напред за случая на термове чрез индукция, съобразена с дефиницията за терм, а след това лесно се проверяват и за останалите споменати обекти.

Твърдение 1. Ако E е терм, атомарна формула, цел или клауза и две субституции съвпадат върху множеството на променливите на E , то резултатите от прилагането на тези субституции към E също съвпадат.

Твърдение 2. Ако E е терм, атомарна формула, цел или клауза, то е в сила равенството $[=:](E)=E$.

Следствие от твърдения 1 и 2. Ако E е затворен терм, затворена атомарна формула, затворена цел или

затворена клауза, то за всяка субституция s е в сила равенството $s(E)=E$.

Забележка 1. Твърдението от горното следствие лесно се доказва и директно - най-напред се установява за затворени термове чрез индукция, съобразена с дефиницията за затворен терм, а след това се разпространява последователно върху затворени атомарни формули, затворени цели и затворени клаузи.

Твърдение 3. Ако E е терм, атомарна формула, цел или клауза, то за всяка субституция s е изпълнено равенството

$$\text{VAR}(s(E)) = \bigcup_{\substack{X \in \text{VAR} \\ (E)}} \text{VAR}(s(X)).$$

Следствие. Ако E е терм, атомарна формула, цел или клауза, а s е субституция, то резултатът $s(E)$ е затворен точно тогава, когато термът $s(X)$ е затворен за всяка променлива X на E .

Ще изложим само доказателството на твърдение 3 за случая на термове. Ако E е дадена променлива X_0 , то $\text{VAR}(E)=\{X_0\}$, тъй че дясната страна на доказваното равенство се равнява на $\text{VAR}(s(X_0))$, което е и лявата страна. Ако $E \in F_0$, равенството пак е вярно, защото двете му страни са празни. Нека сега E е терм от вида $f(T_1, T_2, \dots, T_n)$, където $n > 0$, $f \in F_n$ и $T_1, T_2, \dots, T_n$ са такива термове, че са верни равенствата

$$\text{VAR}(s(T_i)) = \bigcup_{\substack{X \in \text{VAR} \\ (T_i)}} \text{VAR}(s(X)), \quad i=1, \dots, n.$$

Тогава имаме

$$\text{VAR}(s(E)) = \text{VAR}(f(s(T_1), s(T_2), \dots, s(T_n))) = \bigcup_{i=1}^n \text{VAR}(s(T_i)) = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcup_{\substack{X \in \text{VAR} \\ (T_i)}} \text{VAR}(s(X)) \right)$$

и лесно се проверява, че последният израз се равнява на дясната страна на доказваното равенство (използва се, че множеството на променливите на E е обединение на множествата на променливите на $T_1, T_2, \dots, T_n$).

Да предположим сега, че са дадени една субституция s и една структура S . Ще дефинираме едно преобразование s_S , което преобразува всяка оценка в S на променливите пак в такава оценка. Дефиницията на това преобразование е следната: ако v е произволна оценка в S на променливите, то $s_S(v)=v'$, където оценката v' се дефинира с условието, че

$$v'(X)=s(X)^{S,v}$$

за коя да е променлива X . Преобразованието s_S ще наричаме *оператор за присвояване в S , съответен на s* .

Сега ще докажем една теорема, която установява връзка между прилагането на субституция към термове и преобразуването на оценки чрез съответния оператор за присвояване.

Теорема за стойността на резултата от прилагане на субституция към терм

Нека са дадени една субституция s , една структура S и една оценка v в S . Нека $s_S(v)=v'$. Тогава за всеки терм T е в сила равенството $s(T)^{S,v}=T^{S,v'}$.

Доказателство:

Ще използваме индукция, съобразена с дефиницията на понятието терм. Първо проверяваме верността на равенството в случая, когато T е променлива или нулместен функционален символ. Ако T е някоя променлива X , то равенството, което имаме да докажем, добива вида $s(X)^{S,v}=v'(X)$ и е вярно благодарение на равенството $s_S(v)=v'$ и дефиницията на преобразованието s_S . Ако T е някой нулместен функционален символ c , то доказваното равенство пак е вярно, защото и двете му страни са равни на

стойността в S на затворения терм c . Нека сега да имаме $T=f(T_1, T_2, \dots, T_n)$, където $n>0, f \in F_n, T_1, T_2, \dots, T_n$ са термове и са изпълнени равенствата $s(T_i)^{S,v} = T_i^{S,v'}, i=1, \dots, n$. Тогава, означавайки с f^S n -местната операция, чрез която се интерпретира f в S , ще имаме веригата от равенства

$$s(T)^{S,v} = f(s(T_1), s(T_2), \dots, s(T_n))^{S,v} = f^S(s(T_1)^{S,v}, s(T_2)^{S,v}, \dots, s(T_n)^{S,v}) = f^S(T_1^{S,v'}, T_2^{S,v'}, \dots, T_n^{S,v'}) = T^{S,v'}.$$

Ще докажем теорема в подобен дух и за случая на атомарни формули.

Необходимо и достатъчно условие за вярност на резултата от прилагане на субституция към атомарна формула

Нека са дадени една субституция s , една структура S и една оценка v в S . Нека $s_S(v) = v'$. Тогава за всяка атомарна формула A условието $S, v \models s(A)$ е равносилно с условието $S, v' \models A$.

Доказателство:

Ако A е нулместен предикатен символ, то и двете написани условия са равносилни с верността в S на затворената формула A , следователно те са равносилни и помежду си. Нека сега $A = p(T_1, T_2, \dots, T_n)$, където $n>0, p \in P_n$ и $T_1, T_2, \dots, T_n$ са термове. Тогава, означавайки с p^S n -местния предикат, чрез който се интерпретира p в S , ще имаме веригата от равносилности

$$\begin{aligned} S, v \models s(A) &\Leftrightarrow S, v \models p(s(T_1), s(T_2), \dots, s(T_n)) \Leftrightarrow p^S(s(T_1)^{S,v}, s(T_2)^{S,v}, \dots, s(T_n)^{S,v}) = 1 \Leftrightarrow \\ &p^S(T_1^{S,v'}, T_2^{S,v'}, \dots, T_n^{S,v'}) = 1 \Leftrightarrow S, v' \models A. \end{aligned}$$

Следствие

При предположенията и означенията от горната теорема, ако G е произволна цел, то за да бъде изпълнена целта $s(G)$ в S при оценката v , необходимо и достатъчно е целта G да бъде изпълнена в S при оценката v' .

Забележка 2

В случая, когато субституцията s има вида от разгледания преди малко пример, установеното необходимо и достатъчно условие за вярност на резултата от прилагане на s към атомарна формула може да се разглежда като възможна формулировка на едно известно твърдение на Антъни Хоар (Charles Antony Richard Hoare). Въпросното твърдение е полезно при доказване на коректност на програми, съдържащи оператори за присвояване. Според него, за да бъде удовлетворено дадено условие след изпълнението на оператора за присвояване $X_0 := T_0$, необходимо и достатъчно е преди изпълнението на този оператор да е удовлетворено същото условие с X_0 , заместено с T_0 .

12.2. Унификатори и унифицируемост

За използването на метода на резолюцията е важно да умеем по две дадени атомарни формули да намираме такава атомарна формула, която е частен случай и на двете. Действително, за да образуваме резолвента на два дизюнкта, налага се всъщност да намерим атомарна формула, която е едновременно частен случай на атомарна формула, принадлежаща на единия дизюнкт, и на атомарна формула, чието отрицание принадлежи на другия. Методът на унификацията, с който предстои да се занимаем, е основното средство за търсене на атомарна формула, която е частен случай на всяка от две дадени атомарни формули.

Нека A и B са две атомарни формули или два терма. *Унификатор на A и B* ще наричаме всяка субституция, която преобразува A и B в една и съща дума. Ще казваме, че A и B са *унифицируеми*, ако те имат поне един унификатор.

Забележка 1

Да предположим, че са дадени два терма A и B . Да вземем някакъв двуместен предикатен символ e и някаква променлива Z и да разгледаме хорнова програма P , имаща за своя единствена клауза факта $e(Z, Z)$.

Лесно се съобразява, че една субституция s е унификатор на A и B точно тогава, когато тя преобразува атомарната формула $e(A, B)$ в атомарна формула, изводима от P (използваме, че една атомарна формула е изводима от P точно тогава, когато има вида $e(T, T)$ за някой терм T). Като вземем пред вид, че

атомарните формули, изводими от P , са точно атомарните формули, тъждествено верни във всеки модел за P , можем да направим още заключението, че една субституция s е унификатор на A и B точно тогава, когато тя преобразува целта

?- $e(A,B)$.

в цел, изпълнена тъждествено при програмата P . Това дава още, че A и B са унифицируеми точно тогава, когато горната цел е изпълнима при програмата P . Тъй като при използването на Пролог всяка атомарна формула може да се разглежда и като терм, току-що казаното позволява заключенията за унифицируемост и неунифицируемост във всеки от горните четири примера да бъдат направени и с помощта на Strawberry Prolog като се изпълни хорнова програма P от горния прост вид съответно върху целите

?- $e(p(a,Y),p(X,b))$.

?- $e(p(a,X),p(X,b))$.

?- $e(X,f(X))$.

?- $e(p(X,X),p(Y,f(Y)))$.

Ще споменем обаче, че някои други софтуерни реализации на Пролог при изпълнение на споменатата програма P върху третата и четвъртата от горните цели биха дали положителен отговор в противоречие с действителното положение на нещата.

Забележка 2

Когато работим със софтуерна реализация на Пролог, бихме могли да избегнем използването на програма P от вида, посочен в горния пример. Това е така, защото сред вградените предикати на Пролог се включва и двуместен предикат, означаващ с обичайния знак за равенство, и този предикат фактически се характеризира само чрез равенството

$X=X$.

(вж. например файла Standard.add на Strawberry Prolog - да речем чрез избиране на "Help" от менюто и след това на "ADD File"). Поради това бихме могли да заменим четирите цели от горния пример със следните, върху които да изпълним празна програма (програма без никакви клаузи):

?- $p(a,Y)=p(X,b)$.

?- $p(a,X)=p(X,b)$.

?- $X=f(X)$.

?- $p(X,X)=p(Y,f(Y))$.

Ако две атомарни формули са унифицируеми, то съществува атомарна формула, която е частен случай и на двете (достатъчно е да вземем атомарната формула, в която ги преобразува някой техен унификатор); разбира се аналогично е положението и с унифицируемите термове. С помощта на пример 2 можем да се убедим, че обратното не е вярно. Действително, въпреки че, както видяхме в този пример, атомарните формули $p(a,X)$ и $p(X,b)$ не са унифицируеми, атомарната формула $p(a,b)$ е частен случай на всяка от тях (само че субституциите, които преобразуват $p(a,X)$ и $p(X,b)$ в нея, този път са различни). За щастие има лесен начин, чрез който може да се сведе към въпрос за унифицируемост всеки въпрос за съществуване на атомарна формула, която да е частен случай едновременно на две дадени атомарни формули (с този начин ще се занимаем в един от следващите въпроси). Засега ще покажем само, че **ако за две атомарни формули с непресичащи се множества на променливите съществува атомарна формула, която е частен случай и на двете, то тези две атомарни формули са унифицируеми**. И наистина, нека A и B са атомарни формули, за които сечението на множествата $VAR(A)$ и $VAR(B)$ е празно, и нека една атомарна формула C е частен случай както на A , така и на B . Тогава за някои две субституции a и b ще имаме равенствата $C=a(A), C=b(B)$. Да дефинираме едно изображение s на множеството на променливите в множеството на термовете като положим $s(X)=a(X)$ при $X \in VAR(A)$ и $s(X)=b(X)$ при $X \in X \setminus VAR(A)$. Лесно се вижда, че s е субституция. Тази субституция съвпада с a върху множеството $VAR(A)$ и съвпада с b върху множеството $VAR(B)$. Поради това $s(A)=a(A)=C$ и $s(B)=b(B)=C$, следователно $s(A)=s(B)$.

Когато две атомарни формули са унифицируеми, те имат безбройно много унификатори. Това е очевидно, защото ако s е унификатор на две атомарни формули A и B , то всяка друга субституция, която съвпада със s върху множеството $VAR(A) \cup VAR(B)$, също е унификатор на A и B . Можем разбира се да считаме, че различните унификатори на A и B , които съвпадат върху споменатото множество, не се различават съществено един от друг. Има обаче и случаи, когато между два унификатора на дадена двойка от формули е налице по-съществено различие. Например, ако две атомарни формули съвпадат, то всяка субституция е техен унификатор, независимо от това какви термове съпоставя тя на техните

променливи. С оглед на това, което предстои да направим, важно е да отбележим следното: **ако една субституция s е унификатор на две дадени атомарни формули A и B , а d е произволна субституция, то субституцията ds също е унификатор на A и B .** Проверката е съвсем проста: ако имаме равенството $s(A)=s(B)$, то ще имаме и $ds(A)=d(s(A))=d(s(B))=ds(B)$. Нека се условим да наричаме *частни случаи* на една субституция s субституциите от вида ds , където d е произволна субституция. Тогава можем да изкажем току-що отбелязаното свойство още и по такъв начин: **ако една субституция е унификатор на две дадени атомарни формули, то и всеки неин частен случай е техен унификатор.** *Най-общ унификатор* на две дадени атомарни формули ще наричаме такъв техен унификатор, на който всичките им унификатори са частни случаи. Ние ще докажем, че когато две атомарни формули са унифицируеми, те измежду техните унификатори има най-общ. Засега обаче ще дадем някои прости примери, в които непосредствено ще покажем съществуването на такъв унификатор.

Забележка 3

Когато две атомарни формули са унифицируеми, измежду унификаторите им сигурно има такива, които не са най-общи. Действително, нека една субституция s е унификатор на две дадени атомарни формули A и B . Да си вземем две различни променливи Z_1 и Z_2 , такива, че $s(Z_1)=Z_1$ и $s(Z_2)=Z_2$ (такива променливи сигурно има). След това да означим със s' субституцията $[Z_1:=Z_2]s$. Тогава s' пак е унификатор на A и B (защото е частен случай на техния унификатор s), но за разлика от s преобразува променливите Z_1 и Z_2 в един и същ терм (а именно в променливата Z_1). Лесно е да се убедим, че и всяка субституция, която е частен случай на s' , също ще преобразува Z_1 и Z_2 в един и същ терм. Поради това субституцията s не е частен случай на s' и значи s' не е най-общ унификатор на A и B .

Забележка 4

За някои две унифицируеми атомарни формули A и B може да се случи всички унификатори (най-общи или не) да съвпадат върху множеството $\text{VAR}(A) \cup \text{VAR}(B)$ (разсъжденията от пример 6 показват, че в пример 1 положението е именно такова). В такива случаи би могло да се счита, че унификаторите, които не са най-общи, са несъществено различни от най-общите.

Една естествена и важна задача е да се познае дали две дадени атомарни формули или два дадени терма са унифицируеми и в случай, че са унифицируеми, да се намери техен унификатор. Сега ще извършим известна подготвителна работа и ще опишем някои от елементите на един метод за решаване на тази задача, като пълното описание на метода ще завършим в следващия въпрос (методът по същество е даден от Ербран; доста е известен и друг метод, даден от Джон А. Робинсън).

Да наречем две атомарни формули *еднотипни*, ако те представляват един и същ нулместен предикатен символ или пък имат вида $p(T_1, T_2, \dots, T_n)$ и $p(U_1, U_2, \dots, U_n)$, където n е положително цяло число, p е n -местен предикатен символ и $T_1, \dots, T_n, U_1, \dots, U_n$ са термове. По аналогичен начин се дефинира и еднотипност за два терма, никой от които не е променлива - достатъчно е в горното условие думата "предикатен" да се замени с думата "функционален" (не е зле още в този случай вместо p да се напише f). Разбира се, ако две атомарни формули или два терма, които не са променливи, съвпадат, те са еднотипни; освен това отношението еднотипност е симетрично и транзитивно. Очевидно е също, че при прилагане на произволна субституция към една атомарна формула резултатът е атомарна формула, еднотипна с дадената, и аналогично твърдение важи за резултата от прилагане на субституция към терм, който не е променлива. От казаното става ясно, че **ако A и B са атомарни формули или са термове, никой от които не е променлива, и A и B не са еднотипни, то A и B не са унифицируеми.** Не е вярно обаче, че при еднотипност имаме винаги унифицируемост. Това се вижда да речем от пример 2, а може да се види и по-просто - например еднотипни, но не унифицируеми са атомарните формули $p(a)$ и $p(b)$, където p е едноместен предикатен символ, а a и b са константи.

Да предположим, че са дадени две произволни атомарни формули A и B и се интересуваме дали те са унифицируеми. Ако A и B не са еднотипни, отговорът на този въпрос е отрицателен. Да предположим сега, че A и B са еднотипни. Ако A и B съвпадат, те са унифицируеми и тъждествената субституция е техен най-общ унификатор, както отбелязахме в пример 5. Остава да се занимаем с подслучая, когато атомарните формули A и B са различни. Тогава със сигурност ще имаме

$$A=p(T_1, T_2, \dots, T_n), B=p(U_1, U_2, \dots, U_n),$$

където n е някое положително цяло число, p е n -местен предикатен символ и $T_1, T_2, \dots, T_n, U_1, U_2, \dots, U_n$ са термове, като поне за едно i измежду числата $1, \dots, n$ термовете T_i и U_i ще бъдат различни. За произволна субституция s ще имаме равенствата

$$s(A)=p(s(T_1),s(T_2),\dots,s(T_n)), s(B)=p(s(U_1),s(U_2),\dots,s(U_n)),$$

поради което s ще бъде унификатор на A и B точно тогава, когато са изпълнени n -те равенства

$$s(T_1)=s(U_1), s(T_2)=s(U_2), \dots, s(T_n)=s(U_n).$$

За по-удобното записване на това, което ще правим по-нататък, улавяме се при произволен избор на термове T и U да наричаме *решения на уравнението $T=U$* онези субституции s , за които е изпълнено равенството $s(T)=s(U)$ (за такива субституции ще казваме още, че *удовлетворяват уравнението $T=U$*). Разбира се, ще казваме, че дадена субституция е *решение на една система от уравнения* от този вид (или че *удовлетворява тази система*), ако тя е решение на всяко от нейните уравнения. С използване на тази терминология можем казаното преди малко да го преформулираме така: ако n е положително цяло число, p е n -местен предикатен символ и $T_1, \dots, T_n, U_1, \dots, U_n$ са термове, то унификатори на атомарните формули $p(T_1, T_2, \dots, T_n)$ и $p(U_1, U_2, \dots, U_n)$ са точно онези субституции, които са решения на системата от уравнения

$$(1) \quad T_1=U_1, T_2=U_2, \dots, T_n=U_n.$$

По такъв начин ние сведохме по-трудните задачи за търсене на унификатор на две атомарни формули към решаването на системи от уравнения от току-що посочения вид. Разбира се задачата за търсене на унификатор на два терма T и U директно се свежда до решаването на уравнението $T=U$, т.е. пак до решаването на система от вида (1), но с $n=1$.

И така, задачата ни ще бъде да опишем как да работим, когато е дадена една система от вида (1), за да видим дали тя има решение и да охарактеризираме по-просто нейните решения, когато тя има такива. За пълнота няма да изключваме от нашите разглеждания и празна система от уравнения (с $n=0$) - ще считаме, че всяка субституция я удовлетворява.

Забележка 5

Нека P е програмата, състояща се от един факт и разгледана в забележка 1, и нека е дадена една система от вида (1). С разсъждения, подобни на онези от забележка 1, се вижда, че дадената система ще има решение точно тогава, когато при P е изпълнима съответната цел

$$?- e(T_1, U_1), e(T_2, U_2), \dots, e(T_n, U_n).$$

Казаното в забележка 2 позволява при използването на Пролог вместо това да прилагаме празна програма към целта

$$?- T_1=U_1, T_2=U_2, \dots, T_n=U_n.$$

За една променлива ще казваме, че *участва* в дадено уравнение $T=U$, когато тя е променлива на поне един от термовете T и U , а ще казваме, че *участва* в една система от вида (1), ако участва в поне едно от уравненията на системата. Променливите, участващи в дадена система от уравнения, ще наричаме нейни *неизвестни*. За две системи от уравнения ще казваме, че са *еквивалентни*, ако те имат едни и същи решения (включваме и случая, когато никоя от двете системи няма решение). *Най-общо решение* на дадена система от вида (1) ще наричаме такова нейно решение, че всички решения на системата да са негови частни случаи.

Система в решен вид ще наричаме всяка система от уравнения от вида

$$(2) \quad X_1=U_1, X_2=U_2, \dots, X_n=U_n,$$

където $X_1, X_2, \dots, X_n$ са различни помежду си променливи, а $U_1, U_2, \dots, U_n$ са такива термове, че $X_i \in \text{VAR}(U_j)$ при $i, j=1, 2, \dots, n$ (за празната система също считаме, че е в решен вид). Сега ще покажем, че **ако (2) е система в решен вид, а s_0 е субституцията**

$$[U_1, U_2, \dots, U_n =: X_1, X_2, \dots, X_n]$$

(тъждествената субституция при $n=0$), то s_0 е **най-общо решение на (2)**. И наистина, нека е изпълнена предпоставката на това твърдение. Благодарение на обстоятелството, че $X_i \in \text{VAR}(U_j)$ при $i, j=1, 2, \dots, n$, може да се твърди, че субституцията s_0 съвпада с тъждествената субституция върху всяко от

множествата $\text{VAR}(U_j), j=1,2,\dots,n$, следователно $s_0(U_j)=U_j, j=1,2,\dots,n$. Като вземем пред вид и равенствата $s_0(X_j)=U_j, j=1,2,\dots,n$, виждаме, че s_0 е решение на (2). Нека сега s да бъде произволно решение на същата система, т.е. нека да са в сила равенствата $s(X_j)=s(U_j), j=1,2,\dots,n$. Ще покажем, че s е частен случай на s_0 , като покажем, че (както в пример 6) е в сила равенството $s=ss_0$. За тази цел разглеждаме произволна променлива Z . Ако Z е променливата X_j за някое j от множеството $\{1,2,\dots,n\}$, то имаме $s(Z)=s(X_j)=s(U_j)=s(s_0(X_j))=ss_0(Z)$, а в противен случай равенството $s(Z)=ss_0(Z)$ е тривиално, защото тогава $s_0(Z)=Z$.

Ако в една система от вида (1) някое от уравненията няма решение, то очевидно и цялата система няма решение. Сега ще отбележим изрично два случая, когато уравнение, на което страните са термове, няма решение; ще ги наричаме съответно *първи* и *втори случай на явна нерешимост*, а всяко уравнение, за което е налице някой от тези два случая, ще наричаме *явно нерешимо*. Първият случай е онзи, когато никоя от двете страни на уравнението не е променлива и двете страни не са еднотипни. Вторият се описва чрез следното твърдение, което сега ще докажем: **ако X е променлива, а U е такъв терм, различен от X , че $X \in \text{VAR}(U)$, то уравнението $X=U$ няма решение**. Това твърдение следва от факта, че при изказаните предположения за X и U дължината на терма $s(U)$ ще бъде строго по-голяма от дължината на терма $s(X)$, както и да избираме субституцията s (въпросният факт се установява като се използва обстоятелството, че винаги, когато m е положително цяло число, f е m -местен функционален символ и $V_1, V_2, \dots, V_m$ са термове, резултатът от прилагането на една субституция към терма $f(V_1, V_2, \dots, V_m)$ има по-голяма дължина от резултата от прилагането на субституцията към който да е от термовете $V_1, V_2, \dots, V_m$ - това обстоятелство позволява първо да се докаже индуктивно, че винаги, когато U е терм и $X \in \text{VAR}(U)$, дължината на $s(X)$ никога не надминава дължината на $s(U)$, а след това да се покаже, че споменатото неравенство е строго при допълнителното условие термът U да е различен от X).

Забележка 6

Всяка софтуерна реализация на Пролог използва съществено някой метод за унификация, а при коректното му използване би трябвало да се оказва, че унификацията е невъзможна, когато при опит за нейното осъществяване възникне някой от отбелязаните два случая на явна нерешимост. За съжаление в много от реализациите на Пролог (но не и в Strawberry Prolog) съзнателно е допусната некоректност на действията при възникване на втория от тези случаи, като заради повишаване на бързодействието е спестен тъй нареченият "occurs check".