# 27. Теорема за средните стойности (Рол, Лагранж, Коши). Формула на Тейлър

**Дефиниция.** Всеки отворен интервал, съдържащ точката а ще наричаме околност на точката а. Ще казваме, че точката а е вътрешна точка за интервала М, ако съществува околност ξ на точката а и ;

**Дефиниция.** Ще казваме, че функцията f(x) има локален максимум (минимум) в точка С от своята дефиниционна област, ако съществува околност δ на точката С, за която  . Ако функцията f има локален максимум или локален минимум ще казваме, че f има локален екстремум.

**Теорема на Ферма.**

Ако функцията y = f(x) е диференцируема в една вътрешна точка С от своята дефиниционна област и има локален екстремум в тази точка, то f’ (c) =0.

**Теорема на Вайерщрас.**

Ако дадена функция f(x) е непрекъсната в крайния и затворен интервал [a, b], тя достига в този интервал точната си горна и точната си долна граница.

**Теорема на Рол.**

Ако функцията f е непрекъсната в крайния и затворен интервал [a, b], диференцируема в отворения интервал (a, b) и f(a) = f(b), тогава съществува ξ принадлежаща на (a, b) и f’(ξ) = 0.

Доказателство:

Тъй като функцията f(x) е непрекъсната в [a, b], то тя е ограничена. Да означим съответно с L и l точната й горна и точната й долна граница в интервала [a, b].

Ако l = L, то поради неравенството l<=f(x)<=L, изпълнени за всяко х от интервала [a, b], функцията f(x) ще бъде константа в този интервал. Тогава нейната производна е нула в целия интервал (a, b) и теоремата е доказана.

Остава да разгледаме случая, когато l < L. Съгласно теоремата на Вайерщрас съществуват две точки x1 и x2 от интервала [a,b] такива, че f(x1)=l и f(x2) = L. Поне една от тези две точки е вътрешна за интервала [a,b]. И наистина ако допуснем противното, т.е ако имаме x1 = a, x2 = b или пък x1 = b, x2 = a, то от условието бихме получили l = L. Нека x1 е вътрешна за интервала [a,b]. Но f(x1)=l. Тогава функцията f(x) ще има локален минимум в точката x1, поради което съгласно теоремата на Ферма ще имаме f'(x1) = 0. Ako пък x1 е крайна точка за интервала [a,b], то точката x2 ще бъде вътрешна. В такъв случай това ще бъде една точка на локален максимум и следователно пак по теоремата на Ферма ще имаме f'(x2) = 0. И така във всички случаи съществува точка ξ принадлежаща на [a, b], за която f’(ξ) = 0.

**Теорема на Лагранж (формула на Лагранж за крайните нараствания)**

Ако функцията f е непрекъсната в крайния и затворен интервал [a, b], диференцируема в отворения интервал (a, b), то съществува ξ , за която f(b) – f(a) = (b-a)f’(ξ).

Доказателство:

Нека F(x) = f(x) – f(a) – 

F(x) е непрекъсната в [a, b], като разлика на непрекъсната в този интервал функция f(x) и линейна функция и във всяка вътрешна точка на [a, b] има производна равна на: 

Имаме F(a) = F(b) = 0 и за функцията F(x) са изпълнени всички условия от теоремата на Рол.

Следователно съществува ξ  такава, че 

Или f(b) – f(a) = (b-a)f’(ξ), с което теоремата е доказана.

**Теорема на Коши за крайните нараствания.**

Ако f(x) и g(x) се непрекъснати в $[a, b]$ и диференцируеми в $(a, b)$ и $g^{'}\left(x\right) \ne 0$ за всяко х (a, b), то съществува ξ , за която

 - обобщена формула на крайните нараствания на Коши.

Доказателство:

Ще докажем, че g(a) g(b). Да приемем, че g(a) = g(b), следователно за g(x) в интервала [a, b] и е в сила теоремата на Рол. Следователно съществува точка ξ (a, b), такава че g’(ξ) =0, което е противоречие с условието. Следователно g(a) g(b).

Можем да разгледаме помощната функция F(x).



F(x) е непрекъсната в [a, b], като разлика на непрекъснати в този интервал функции f(x) и g(x) и във всяка вътрешна точка на [a, b] има производна равна на:



Имаме F(a) = F(b) = 0 и за функцията F(x) са изпълнени всички условия от теоремата на Рол. Следователно съществува ξ  такава, че  от условието g’(ξ)0

, което доказва теоремата.

Формулата на Лагранж е частен случай от формулата на Коши при g(x) =x.

**Теорема на Тейлър.**

Да предположим, че функцията f(x) притежава производна до ред (n+1) в н якоя околност δ на една точка а от нейната дефиниционна област. За всяко х принадлежащо на δ съществува точка ξ между x и a такава, че:

f(x) =f(a) +  - формула на Тейлър.

Доказателство:

Да разгледаме функциите:



h(t) = (x-t)n+1



h’(t) = -(n+1)(x-t)n

За функциите h(t) и g(t) прилагаме теорема на Коши за крайните в интервал (a,x) или (x,a).

h’(t) 0 за всяко t (a, x) или (x, a) и h(t) и g(t) са непрекъснати и диференцируеми в (a, x) и (x, a) следователно съществува т.ξ (a, x) или (x, a), така че:  от дефиницията:

g(x) – g(a) =

h(x) – h(a) = -h(a) = -(x-a)n+1

 

h’(ξ)= -(n+1)(x-ξ)n

 или

f(x) =f(a) + , което доказва теоремата