***30. Конични сечения – парабола, елипса, хипербола. Свойства.***

Получаване на каноничните уравнения на парабола, елипса и хипербола като множества от точки чрез фокус и директриса. Фокални свойства на елипса и хипербола.

Нека *F* и *g* са фиксирани точка и права, като . Множеството от точки *M* в равнината , такива че , където е константа, се нарича **конично сечение *k*** с **фокус** *F*, **директриса** *g* и **ексцентритет** *e*.

Ще намерим уравнение на *k* спрямо подходяща ортонормирана координатна система в *α*.

Избираме ортонормирана координатна система , такава че . Тогава , където (тъй като точката и правата са дадени, можем да приемем, че ни е известно и разстоянието между тях) и (тоест това е нормалното уравнение на правата *g* спрямо *K’*).

Нека точката . Следователно и .

Точката *M* е от коничното сечение *k* .

Така получихме, че спрямо *K’* коничното сечение *k* има уравнение:

С цел опростяване на това уравнение, преминаваме към втора ортонормирана координатна система , чието начало *O* ще определим допълнително (в зависимост от *e*).

Ако и , то

Тогава . Стойността на *α* определяме от . В този случай коничното сечение се нарича **парабола**, а уравнението:

* **канонично уравнение на парабола *π***.

Тогава и .

Тогава ще определим *α* по следния начин: . Така спрямо *K* коничното сечение ще има уравнение:

Тогава и .

* . Означаваме с и . В този случай коничното сечение се нарича **елипса**, а уравнението:

- **канонично уравнение на елипсата *ε***.

* . Означаваме с и . В този случай коничното сечение се нарича **хипербола**, а уравнението:

- **канонично уравнение на хиперболата *χ***.

Спрямо подходяща ортонормирана координатна система параболата , и . От уравнението следва, че ако , то . Следователно всички точки на *π* са в една полуравнина спрямо .

Ако , то е **ос на симетрия на *π***.

Ако *O* е началото на координатната ситема, то ( ). Тоест оста пресича *π* в точката *O*, която се нарича **връх** на *π*.

Сега ще намерим пресечната точка на параболата и оста : . Тоест , считана два пъти. се нарича **върхова тангента на *π***.

Произволна права *l* пресича *π* в 0, 1 или 2 точки. Ако е в една точка, *l* се нарича **тангента на *π***.

Нека върхът , където *l* е върхова тангента. Нека . Нека . Следователно всяка права през върха сече още веднъж параболата.

Нека е дадена елипсата спрямо подходяща ортонормирана координатна система *K*. Означаваме (тъй като ). Тогава . От друга страна . Забелязваме също така, че , тоест . Нека . Тогава , където . Тогава намираме и . Следователно ексцентритетът е .

Тъй като е изпълнено уравнението , то и . Следователно точките на *ε* са вътрешни на правоъгълника, образуван от правите .

Тъй като в случай, че , то и . Тогава осите и наричаме **оси на *ε***.

Тъй като и , то точката *O* е **център на симетрия на *ε***.

Ще намерим пресечните точки на . Пресечните точки на . Точките наричаме **върхове на елипсата *ε***.

Нека . Търсим , считано два пъти. Правата наричаме **върхова тангента на *ε***. Аналогично правите са върхови тангенти.

Ако и . Прието е отсечката да се нарича **голяма ос**, а - **малка ос на елипсата *ε***.

Нека вземем точката и правата . Тогава и . Следователно , тоест *F’* и *g’* също са фокус и директриса на *ε*.

*g’*

*g*

*F*

*F’*

-*a*

*a*

*b*

-*b*

Освен това и . Като вземем предвид, че и , получаваме . Така получаваме следното **фокално свойство на елипсата**:

Забележете, че това е дължината на отсечката, която елипсата отрязва от абцисата.

Нека е дадена хипербола спрямо подходяща ортонормирана координатна система *K*. Означаваме . Тогава . Освен това имаме и .

Нека точката . Тогава нейните координати изпълняват уравнението , от където следва . Тоест между правите няма точки от хиперболата. Следователно графиката на хиперболата се състои от два клона.

Ако . Следователно осите и са оси на симетрия на *χ* и се наричат **оси на хиперболата**, а точката *O* – **център на *χ***. Като оста наричаме **реална ос**, а - **имагинерна ос**.

Нека . Точките наричаме **върхове на хиперболата**.

Ще потърсим , но , следователно графиката на хиперболата не пресича оста .

Нека . Тогава , считана два пъти. Правата наричаме **върхова тангента**. Аналогично правата също е върхова тангента.

Нека е дадена правата е цънтърът на хиперболата и . Тогава . Тогава ако , тоест , то правата *l* не пресича хиперболата. Ако , тоест , то правата *l* пресича хиперболата в две различни точки. А когато , тоест , то правите отделят правите, пресичащи хиперболата от тези, които не я пресичат. Тези прави наричаме **асимптоти на хиперболата *χ***.

Можем да изразим координатата *y*: , където . Следователно , и тогава получаваме ексцентритетът .

Нека сега разгледаме точката и правата . За тях , и . Следователно тези точка и права също ще са фокус и директриса на хиперболата *χ*.

Тъй като и , то и . Тогава – **фокално свойство на хиперболата *χ***.

*g*

*g’*

*F*

*F’*

-*a*

*a*