***30. Конични сечения – парабола, елипса, хипербола. Свойства.***

Получаване на каноничните уравнения на парабола, елипса и хипербола като множества от точки чрез фокус и директриса. Фокални свойства на елипса и хипербола.

Нека *F* и *g* са фиксирани точка и права, като $F\notin g$. Множеството от точки *M* в равнината $α=\left(F, g\right)$, такива че $\frac{\left|MF\right|}{\left|M, g\right|}=e$, където $e>0$ е константа, се нарича **конично сечение *k*** с **фокус** *F*, **директриса** *g* и **ексцентритет** *e*.

Ще намерим уравнение на *k* спрямо подходяща ортонормирана координатна система в *α*.

Избираме ортонормирана координатна система $K^{'}=O'\vec{e\_{1}}\vec{e\_{2}}$, такава че $O^{'}\in g, O^{'}F⊥g, \vec{e\_{1}}^{K^{'}}=\frac{\vec{O'F}}{\left|\vec{O'F}\right|}$. $И нека \vec{e\_{2}}∥g.$ Тогава $F^{K^{'}}\left(p, 0\right)$, където $p=\left|F, g\right|$ (тъй като точката и правата са дадени, можем да приемем, че ни е известно и разстоянието между тях) и $g^{K^{'}}:x^{'}=0$ (тоест това е нормалното уравнение на правата *g* спрямо *K’*).

Нека точката $M^{K^{'}}\left(x^{'}, y'\right)$. Следователно $\left|MF\right|=\sqrt{\left(p-x'\right)^{2}+y'^{2}}$ и $\left|M, g\right|=\left|x'\right|$.

Точката *M* е от коничното сечение *k* $⇔ \frac{\left|MF\right|}{\left|M, g\right|}=e ⇔ \frac{\sqrt{\left(p-x'\right)^{2}+y'^{2}}}{\left|x'\right|}=e ⇔ \left(p-x'\right)^{2}+y'^{2}=e^{2}x'^{2} ⇔ p^{2}-2px^{'}+x'^{2}+y'^{2}-e^{2}x'^{2}=0 ⇔ \left(1-e^{2}\right)x'^{2}-2px^{'}+y'^{2}+p^{2}=0$.

Така получихме, че спрямо *K’* коничното сечение *k* има уравнение:

$$k^{K^{'}}: \left(1-e^{2}\right)x'^{2}-2px^{'}+y'^{2}+p^{2}=0$$

С цел опростяване на това уравнение, преминаваме към втора ортонормирана координатна система $K=O\vec{e\_{1}}\vec{e\_{2}}$, чието начало *O* ще определим допълнително (в зависимост от *e*).

Ако $M^{K^{'}}\left(x^{'}, y'\right)$ и $M^{K}\left(x, y\right)$, то

$$\left\{\begin{array}{c}x^{'}=x+α\\y^{'}=y\end{array}\right. ⇒ k^{K }: \left(1-e^{2}\right)\left(x^{2}+2xα+α^{2}\right)-2p\left(x+α\right)+y^{2}+p^{2}=0$$

$$⇔k^{K}: y^{2}+\left(1-e^{2}\right)x^{2}+2\left(\left(1-e^{2}\right)α-p\right)x+\left(1-e^{2}\right)α^{2}-2pα+p^{2}=0$$

* $e=1$

Тогава $k^{K}: y^{2}-2px-2pα+p^{2}=0$. Стойността на *α* определяме от $p^{2}-2pα=0 ⇒ α=\frac{p}{2}$. В този случай коничното сечение се нарича **парабола**, а уравнението:

$$π^{K}: y^{2}-2px=0$$

* **канонично уравнение на парабола *π***.

Тогава $F^{K^{'}}\left(p, 0\right)⇒ \left\{\begin{array}{c}x=x^{'}-α=x^{'}-\frac{p}{2}\\y=y'\end{array}\right. ⇒ F^{K}\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и $g^{K}:x=-\frac{p}{2}$.

* $e\ne 1$

Тогава ще определим *α* по следния начин: $\left(1-e^{2}\right)α-p=0 ⇒ α=\frac{p}{1-e^{2}} ⇒ p^{2}+\left(1-e^{2}\right)α^{2}-2pα=p^{2}+\frac{p^{2}}{1-e^{2}}-\frac{2p^{2}}{1-e^{2}}=p^{2}-\frac{p^{2}}{1-e^{2}}=-\frac{p^{2}e^{2}}{1-e^{2}}$. Така спрямо *K* коничното сечение ще има уравнение:

$$k^{K}: \left(1-e^{2}\right)x^{2}+y^{2}-\frac{p^{2}e^{2}}{1-e^{2}}=0$$

$$⇕$$

$$k^{K}: \frac{x^{2}}{\frac{p^{2}e^{2}}{\left(1-e^{2}\right)^{2}}}+\frac{y^{2}}{\frac{p^{2}e^{2}}{1-e^{2}}}=1$$

Тогава $F^{K^{'}}\left(p, 0\right)⇒ \left\{\begin{array}{c}x=x^{'}-α=x^{'}-\frac{p}{1-e^{2}}\\y=y'\end{array}\right. ⇒ F^{K}\left(-\frac{pe^{2}}{1-e^{2}}, 0\right)$ и $g^{K}:x=-\frac{p}{1-e^{2}}$.

* $e<1 ⇒1-e^{2}>0$. Означаваме с $a^{2}=\frac{p^{2}e^{2}}{\left(1-e^{2}\right)^{2}}, a>0$ и $b^{2}=\frac{p^{2}e^{2}}{1-e^{2}}, b>0$. В този случай коничното сечение се нарича **елипса**, а уравнението:

$$ε^{K}: \frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$$

 - **канонично уравнение на елипсата *ε***.

* $e>1 ⇒1-e^{2}<0$. Означаваме с $a^{2}=\frac{p^{2}e^{2}}{\left(1-e^{2}\right)^{2}}, a>0$ и $b^{2}=\frac{p^{2}e^{2}}{e^{2}-1}, b>0$. В този случай коничното сечение се нарича **хипербола**, а уравнението:

$$χ^{K}: \frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$$

- **канонично уравнение на хиперболата *χ***.

Спрямо подходяща ортонормирана координатна система $K=O\vec{e\_{1}}\vec{e\_{2}}$ параболата $π^{K}: y^{2}-2px=0$, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ и $g:x=-\frac{p}{2}$. От уравнението следва, че ако $M\left(x, y\right)\in π$, то $x\geq 0$. Следователно всички точки на *π* са в една полуравнина спрямо $O\vec{e\_{2}}$.

Ако $M\left(x, y\right)\in π$, то $M\_{1}\left(x, -y\right)\in π ⇒O\vec{e\_{1}}=Ox$ е **ос на симетрия на *π***.

Ако *O* е началото на координатната ситема, то $Ox∩π=O$ ( $Ox:y=0 ⇒ \left\{\begin{array}{c}y^{2}-2px=0\\y=0\end{array}\right.⇒x=0$). Тоест оста пресича *π* в точката *O*, която се нарича **връх** на *π*.

Сега ще намерим пресечната точка на параболата и оста $Oy$: $\left\{\begin{array}{c}x=0\\y^{2}-2px=0\end{array}\right. ⇒ y\_{1, 2}=0$. Тоест $Oy∩π=O\left(0, 0\right)$, считана два пъти. $Oy$ се нарича **върхова тангента на *π***.

Произволна права *l* пресича *π* в 0, 1 или 2 точки. Ако е в една точка, *l* се нарича **тангента на *π***.

Нека върхът $O\in l$, където *l* е върхова тангента. Нека $l:y=kx$. Нека $A=l∩π ⇒ \left\{\begin{array}{c}y^{2}=2px\\y=kx\end{array}\right.⇒ k^{2}x^{2}=2px, x\ne 0 ⇒l∩π=A\left(\frac{2p}{k^{2}}, \frac{2p}{k}\right)$. Следователно всяка права през върха сече още веднъж параболата.

Нека е дадена елипсата $ε: \frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ спрямо подходяща ортонормирана координатна система *K*. Означаваме $c=\frac{e^{2}p}{1-e^{2}}>0$ (тъй като $e<1, p>0, e^{2}>0$). Тогава $F^{K}\left(-c, 0\right)$. От друга страна $a^{2}-b^{2}=\frac{p^{2}e^{2}}{\left(1-e^{2}\right)^{2}}-\frac{p^{2}e^{2}}{1-e^{2}}=\frac{p^{2}e^{2}-p^{2}e^{2}+p^{2}e^{4}}{\left(1-e^{2}\right)^{2}}=\frac{p^{2}e^{4}}{\left(1-e^{2}\right)^{2}}=\left(\frac{e^{2}p}{1-e^{2}}\right)^{2}=c^{2}$. Забелязваме също така, че $-\frac{a^{2}}{c}=-\frac{\frac{p^{2}e^{2}}{\left(1-e^{2}\right)^{2}}}{\frac{e^{2}p}{1-e^{2}}}=-\frac{p}{1-e^{2}}$, тоест $g^{K}:x=-\frac{a^{2}}{c}$. Нека $M\left(x, y\right)\in ε$. Тогава $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1 ⇔ \frac{y^{2}}{b^{2}}=1-\frac{x^{2}}{a^{2}} ⇔ y^{2}=\frac{b^{2}\left(a^{2}-x^{2}\right)}{a^{2}} ⇒y=ζ\frac{b}{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}$, където $ζ=\pm 1$ . Тогава намираме $\left|MF\right| = \sqrt{\left(-c-x\right)^{2}+\frac{b^{2}}{a^{2}}\left(a^{2}-x^{2}\right)} = \frac{1}{a}\sqrt{c^{2}a^{2}+2ca^{2}x+a^{2}x^{2}+a^{2}b^{2}-b^{2}x^{2}}=\frac{1}{a}\sqrt{c^{2}x^{2}+2ca^{2}x+a^{4}}=\frac{1}{a}\left|cx+a^{2}\right|$ и $\left|M, g\right|=\left|x+\frac{a^{2}}{c}\right|=\frac{1}{c}\left|cx+a^{2}\right|$. Следователно ексцентритетът е $e=\frac{\frac{1}{a}\left|cx+a^{2}\right|}{\frac{1}{c}\left|cx+a^{2}\right|}=\frac{c}{a}$.

Тъй като е изпълнено уравнението $\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$, то $\frac{x^{2}}{a^{2}}\leq 1 ⇔ x^{2}\leq a^{2}⇔ \left|x\right|\leq a$ и $\left|y\right|\leq b$. Следователно точките на *ε* са вътрешни на правоъгълника, образуван от правите $a\_{1}:x=-a, a\_{2}:x=a, b\_{1}:y=-b, b\_{2}:y=b$.

Тъй като в случай, че $M\left(x, y\right)\in ε$, то $M\_{1}\left(x, -y\right)\in ε$ и $M\_{2}\left(-x, y\right)\in ε$. Тогава осите $Ox$ и $Oy$ наричаме **оси на *ε***.

Тъй като и $M\_{3}\left(-x, -y\right)\in ε$, то точката *O* е **център на симетрия на *ε***.

Ще намерим пресечните точки на $Ox∩ε=\left\{A\_{1}, A\_{2}\right\}: \left\{\begin{array}{c}\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\\y=0\end{array}\right. ⇒ A\_{1}\left(-a, 0\right), A\_{2}\left(a, 0\right)$. Пресечните точки на $Oy∩ε=\left\{B\_{1}, B\_{2}\right\}: \left\{\begin{array}{c}\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\\x=0\end{array}\right. ⇒ B\_{1}\left(0, b\right), B\_{2}\left(0, -b\right)$. Точките $A\_{1}, A\_{2}, B\_{1}, B\_{2}$ наричаме **върхове на елипсата *ε***.

Нека $a\_{1}:x=-a, a\ne 0$. Търсим $a\_{1}∩ε: \left\{\begin{array}{c}\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\\x=-a\end{array}\right. ⇒ y^{2}=0 ⇒a\_{1}∩ε=A\_{1}$, считано два пъти. Правата $a\_{1}$ наричаме **върхова тангента на *ε***. Аналогично правите $a\_{2}, b\_{1}, b\_{2}$ са върхови тангенти.

Ако $\left|A\_{1}A\_{2}\right|=2a, \left|B\_{1}B\_{2}\right|=2b$ и $a>b$. Прието е отсечката $A\_{1}A\_{2}$ да се нарича **голяма ос**, а $B\_{1}B\_{2}$ - **малка ос на елипсата *ε***.

Нека вземем точката $F'\left(c, 0\right)$ и правата $g^{'}:x=\frac{a^{2}}{c}$. Тогава $\left|MF'\right|=\sqrt{\left(c-x\right)^{2}+\frac{b^{2}}{a^{2}}\left(a^{2}-x^{2}\right)}=\frac{1}{a}\sqrt{c^{2}a^{2}-2ca^{2}x+a^{2}x^{2}+a^{2}b^{2}-b^{2}x^{2}}=\frac{1}{a}\sqrt{c^{2}x^{2}-2ca^{2}x+a^{4}}=\frac{1}{a}\left|cx-a^{2}\right|$ и $\left|M, g'\right|=\left|x-\frac{a^{2}}{c}\right|=\frac{1}{c}\left|cx-a^{2}\right|$. Следователно $\frac{\left|MF'\right|}{\left|M, g\right|}=\frac{c}{a}=e$, тоест *F’* и *g’* също са фокус и директриса на *ε*.

*g’*

*g*

*F*

*F’*

-*a*

*a*

*b*

-*b*

Освен това $\left|MF\right|=\left|\frac{c}{a}x+a\right|=\left|ex+a\right|$ и $\left|MF'\right|=\left|ex-a\right|$. Като вземем предвид, че $e<1$ и $\left|x\right|\leq a$, получаваме $\left|MF\right|=a+ex, \left|MF'\right|=a-ex$. Така получаваме следното **фокално свойство на елипсата**:

$$\left|MF\right|+\left|MF'\right|=2a=const$$

Забележете, че това е дължината на отсечката, която елипсата отрязва от абцисата.

Нека е дадена хипербола $χ: \frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ спрямо подходяща ортонормирана координатна система *K*. Означаваме $c=\frac{e^{2}p}{e^{2}-1}$. Тогава $a^{2}+b^{2}=\frac{p^{2}e^{2}}{\left(e^{2}-1\right)^{2}}+\frac{p^{2}e^{2}}{e^{2}-1}=\frac{e^{4}p^{2}}{\left(e^{2}-1\right)^{2}}=c^{2}$. Освен това имаме $F^{K}\left(c, 0\right)$ и $g^{K}:x=\frac{a^{2}}{c}$.

Нека точката $M\left(x, y\right)\in χ$. Тогава нейните координати изпълняват уравнението $\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$, от където следва $\frac{x^{2}}{a^{2}}\geq 1 ⇒ \left|x\right|\geq a$. Тоест между правите $b\_{1}:x=-a, b\_{2}:x=a$ няма точки от хиперболата. Следователно графиката на хиперболата се състои от два клона.

Ако $M\left(x, y\right)\in χ ⇒ M\_{1}\left(x, -y\right)\in χ, M\_{2}\left(-x, y\right)\in χ, M\_{1}\left(-x, -y\right)\in χ$. Следователно осите $Ox$ и $Oy$ са оси на симетрия на *χ* и се наричат **оси на хиперболата**, а точката *O* – **център на *χ***. Като оста $Ox$ наричаме **реална ос**, а $Oy$ - **имагинерна ос**.

Нека $Ox∩χ=\left\{A\_{1}, A\_{2}\right\} ⇒ \left\{\begin{array}{c}y=0\\\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\end{array}\right. ⇒x=\pm a ⇒ \left\{\begin{array}{c}A\_{1}\left(-a, 0\right)\\A\_{2}\left(a, 0\right)\end{array}\right.$. Точките $A\_{1}, A\_{2}$ наричаме **върхове на хиперболата**.

Ще потърсим $Oy∩χ: \left\{\begin{array}{c}x=0\\\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\end{array}\right. ⇒ -y^{2}=b^{2} ⇒b=y=0$, но $b\ne 0$, следователно графиката на хиперболата не пресича оста $Oy$.

Нека $b\_{1}:x=-a$. Тогава $χ∩b\_{1}: \left\{\begin{array}{c}x=-a\\\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\end{array}\right. ⇒ χ∩b\_{1}=A\_{1}\left(-a, 0\right)$, считана два пъти. Правата $b\_{1}$ наричаме **върхова тангента**. Аналогично правата $b\_{2}:x=a, b\_{2}∩χ=A\_{2}\left(a, 0\right)$ също е върхова тангента.

Нека е дадена правата $lzO$ е цънтърът на хиперболата и $l\ne Ox, l\ne Oy$. Тогава $l∩χ: \left\{\begin{array}{c}y=kx\\\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\end{array}\right. ⇒ \frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{k^{2}x^{2}}{b^{2}}=1 ⇒ \left(b^{2}-k^{2}a^{2}\right)x^{2}=a^{2}b^{2}$. Тогава ако $b^{2}-k^{2}a^{2}<0$, тоест $\left|k\right|>\frac{b}{a}$, то правата *l* не пресича хиперболата. Ако $b^{2}-k^{2}a^{2}>0$, тоест $\left|k\right|<\frac{b}{a}$, то правата *l* пресича хиперболата в две различни точки. А когато $b^{2}-k^{2}a^{2}=0$, тоест $a\_{1}:y=-\frac{b}{a}x, a\_{2}:y=\frac{b}{a}x$, то правите $a\_{1}, a\_{2}$ отделят правите, пресичащи хиперболата от тези, които не я пресичат. Тези прави наричаме **асимптоти на хиперболата *χ***.

Можем да изразим координатата *y*: $\frac{y^{2}}{b^{2}}=\frac{x^{2}-a^{2}}{a^{2}} ⇒y=η\frac{b}{a}\sqrt{x^{2}-a^{2}}$, където $η=\pm 1$. Следователно $\left|MF\right|=\sqrt{\left(c-x\right)^{2}+\frac{b^{2}}{a^{2}}\left(x^{2}-a^{2}\right)}=\frac{1}{a}\sqrt{a^{2}c^{2}-2a^{2}cx+\left(a^{2}+b^{2}\right)x^{2}-a^{2}b^{2}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^{4}-2a^{2}cx+c^{2}x^{2}}=\frac{1}{a}\left|a^{2}-cx\right|$, $\left|M, g\right|=\frac{1}{c}\left|cx-a^{2}\right|$ и тогава получаваме ексцентритетът $e=\frac{c}{a}$.

Нека сега разгледаме точката $F'\left(-c, 0\right)$ и правата $g^{'}:x=-\frac{a^{2}}{c}$. За тях $\left|MF'\right|=\sqrt{\left(c+x\right)^{2}+\frac{b^{2}}{a^{2}}\left(x^{2}-a^{2}\right)}=\frac{1}{a}\sqrt{a^{2}c^{2}+2a^{2}cx+\left(a^{2}+b^{2}\right)x^{2}-a^{2}b^{2}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^{4}+2a^{2}cx+c^{2}x^{2}}=\frac{1}{a}\left|a^{2}+cx\right|$, $\left|M, g\right|=\frac{1}{c}\left|cx+a^{2}\right|$ и $\frac{\left|MF'\right|}{\left|M, g\right|}=\frac{c}{a}=e$. Следователно тези точка и права също ще са фокус и директриса на хиперболата *χ*.

Тъй като $e>1$ и $\left|x\right|\geq a$, то $\left|MF\right|=\left|a-\frac{c}{a}x\right|=\left|a-ex\right|=ex-a$ и $\left|MF'\right|=\left|a+\frac{c}{a}x\right|=\left|a+ex\right|=a+ex$. Тогава $\left|\left|MF\right|-\left|MF'\right|\right|=\left|ex-a-a-ex\right|=\left|2a\right|=2a=const$ – **фокално свойство на хиперболата *χ***.

*g*

*g’*

*F*

*F’*

-*a*

*a*