

25. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснати функции. Теорема на Нютон – Лайбниц.

Def. Нека $f(x)$ е ограничена върху интервала $[a, b]$ и $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ е разбиване на интервала $[a, b]$,

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \text{ тогава:}$$

$$s_{\tau} = \sum_{i=1}^n m_i * \Delta x_i - \text{малка сума на Дарбу}$$

$$S_{\tau} = \sum_{i=1}^n M_i * \Delta x_i - \text{голяма сума на Дарбу}$$

Th. За всяко разбиване τ и τ' , за които $\tau < \tau'$ (по броя на интервалите в разбиването) $\Rightarrow$ малките суми на Дарбу са по – малки от големите суми на Дарбу, съответно за двете разбивания. ($s_{\tau} < s_{\tau'} < S_{\tau'} < S_{\tau}$)

Док.

$$\begin{array}{ccccccccccc} | & | & | & & & & & & | & | & | & | \\ a & x_1 & x_2 & & \dots & & & & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n & b \\ \parallel & \parallel & \parallel & & & & & & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ x'_{0a} & x'_1 & x'_2 & & \dots & & & & x'_{n-2} & x'_{n-1} & x'_n & x'_{n+1} \end{array}$$

Нека $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ и $\tau' = \{x'_i\}_{i=0}^{n+1}$, но

$x'_i = x_i$ за всяко $i = 0, 1, \dots, n-1$, където $x'_n \in [x_{n-1}, x_n]$

$$\Leftrightarrow x'_{n+1} = x_n = b$$

$s_{\tau} = \sum_{i=1}^n m_i * \Delta x_i$, където $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ за всяко $i = 0, 1, \dots, n-1$

$S_{\tau} = \sum_{i=1}^n M_i * \Delta x_i$, където $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ за всяко $i = 0, 1, \dots, n-1$

Тогава:

$$s_{\tau} = \sum_{i=1}^{n+1} m'_i * \Delta x'_i = s_{\tau} = \sum_{i=1}^{n-1} m'_i * \Delta x'_i + m_n * \Delta x'_n + m_{n+1} * \Delta x'_{n+1}$$

$$m'_{n-1} = \inf_{x \in [x'_{n-1}, x'_n]} f(x) \text{ и } m'_n = \inf_{x \in [x'_n, x'_{n+1}]} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \inf_{x \in [x'_{n-1}, x'_{n+1}]} f(x) = m_n$$

$$1. \quad m'_{n-1} \geq m_n$$

$$2. \quad m'_n \geq m_n$$

$$s_{\tau'} \geq \sum_{i=1}^{n-1} m'_i * \Delta x'_i + m_n * \Delta x'_n + m_n * \Delta x'_{n+1} = \sum_{i=1}^{n-1} m'_i * \Delta x'_i + m_n * (\Delta x'_n + \Delta x'_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} m'_i * \Delta x'_i + m_n * \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m'_i * \Delta x'_i = s_{\tau}$$

$$\Leftrightarrow s_{\tau} \leq s_{\tau'}$$

$$\Leftrightarrow \text{Аналогично се доказва, че } S_{\tau'} \leq S_{\tau}$$

Теорема 1: Ако към един начин на делене на интервала $[a, b]$ на подинтервали добавим краен брой нови точки, малката сума на Дарбу не намалява, а големата не нараства.

Деф. Нека $f(x)$ е дефинирана върху $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$. Взимаме набор от точки $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Разбиване на интервали $[a, b]$: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \text{ за всяко } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\delta_\tau = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i - \text{големина на разбиването } \tau$$

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ за } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) * \Delta x_i = \sigma_\tau(f; c) - \text{сума на Риман}$$

Деф. Едно число I се нарича определен интеграл на Риман от функцията $f(x)$ върху интервала $[a, b]$ ако за всяко $\varepsilon > 0$, съществува

$$\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ и за всяко } \tau = \{x_i\}_{i=0}^{\infty}, \delta_\tau < \delta \text{ и за всяко } c = \{c_i\}_{i=1}^n$$

$$\Rightarrow c_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ за } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow |\sigma_\tau(f; c) - I| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow I = \int_a^b f(x) dx - \text{Определен интеграл на Риман}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta_\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau(f; c)$$

Th. Критерий за интегрируемост (Необходимо условие)

Нека $f(x)$ е интегрируема върху интервала $[a, b] \Rightarrow f(x)$ е ограничена върху интервала $[a, b]$.

Док. Допускаме, че $f(x)$ не е ограничена върху интервала $[a, b]$, тъй като $f(x)$ е интегрируема върху интервала $[a, b]$.

$$\Rightarrow \text{Съществува } I \in \mathbb{R} \text{ и за всяко } \varepsilon > 0, \text{ съществува } \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ и за всяко } \tau = \{x_i\}_{i=0}^{\infty}, \delta_\tau < \delta \text{ и за всяко } c = \{c_i\}_{i=1}^n,$$

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ за } i = 1, 2, \dots, n$$

Нека за определеност $\varepsilon = 1$

$$\Rightarrow \text{Съществува } \delta_1 \text{ и за всяко } \tau = \{x_i\}_{i=0}^{\infty}, \delta_\tau < \delta_1 \text{ и за всяко } c = \{c_i\}_{i=1}^n, c_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ за } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow |\sigma_\tau(f; c) - I| < 1$$

$$I - 1 < \sigma_\tau(f; c) < I + 1$$

$$I - 1 < \sum_{i=1}^n f(c_i) * \Delta x_i < I + 1$$

Фиксираме $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{\infty}, \delta_\tau < \delta_1$, по допускане $f(x)$ не е ограничена върху интервала $[a, b] \Rightarrow f(x)$ не е ограничена върху поне един от интервалите $[x_{i-1}, x_i]$.

Без ограничение на общността нека считаме, че $f(x)$ не е ограничена върху $[x_0, x_1]$

За всяко $\{c_i\}_{i=2}^n$ – фиксирано : $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 2, 3, \dots, n$)

За всяко $\hat{c}_1 \in [x_0, x_1] \Rightarrow \hat{c} = \{ \hat{c}_1, c_2, \dots, c_n \}$

$$\Rightarrow I - 1 < \sigma_\tau(f; c) < I + 1$$

$$I - 1 < f(\hat{c}) * \Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(c_i) * \Delta x_i < I + 1, \text{ където } \sum_{i=2}^n f(c_i) * \Delta x_i = \sum_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\Delta x_1} (I - 1 - \sum_0) < f(\hat{c}) < \frac{1}{\Delta x_1} (I + 1 - \sum_0), \text{ но } I - 1 - \sum_0 - \text{фиксирано и } I + 1 - \sum_0 - \text{фиксирано}$$

$\Rightarrow f(x)$ е ограничена върху интервала $[a, b]$, противоречие с допуснатото.

Деф: $\bar{I} = \inf S$, $S \in Q$ наричаме горен интеграл на Дарбу $s \leq \bar{I}$, т.е. P е ограничено отгоре и има точна горна граница.

Деф: $\underline{I} = \sup s$, $s \in P$ наричаме долен интеграл на Дарбу.

Деф: Функцията f е ограничена и интегрируема в Риманов смисъл в $[a, b]$, ако $\bar{I} = \underline{I}$ и $I = \bar{I} = \underline{I} = \int_a^b f(x)dx$ се нарича определен Риманов интеграл на f в $[a, b]$.

Th. Критерий за интегрируемост на функция

Нека $f(x)$ е дефинирана и ограничена върху крайния затворен интервал $[a, b]$. Тогава функцията $f(x)$ е интегрируема в Риманов смисъл върху крайния затворен интервал $[a, b] \Leftrightarrow$ за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и за всяко τ , $\delta_{(\varepsilon)} < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

Док.

$\Rightarrow$

Нека функцията $f(x)$ е интегрируема върху крайния затворен интервал $[a, b]$, т.е.

Съществува $I \in \mathbb{R}$, такова че за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и за всяко $\tau = \{x_i\}_{i=1}^n$ върху крайния затворен интервал $[a, b]$ за всяко $i = 0, 1, \dots, n$

$\delta_\tau < \delta$ и за всяко $c = \{c_i\}_{i=1}^n$, такова че $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, за $i = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow |\sigma_\tau(f; c) - I| < \varepsilon/3 \Leftrightarrow I - \varepsilon/3 < \sigma_\tau(f; c) < I + \varepsilon/3$$

Фиксираме τ и разглеждаме c :

$$\sup_c \sigma_\tau(f; c) \leq I + \varepsilon/3$$

$$\Rightarrow I - \varepsilon/3 \leq \inf_c \sigma_\tau(f; c) = s_\tau \leq S_\tau = \sup_c \sigma_\tau(f; c) \leq I + \varepsilon/3$$

$$\Rightarrow I - \varepsilon/3 \leq s_\tau \leq S_\tau \leq I + \varepsilon/3$$

$$\Rightarrow I - \varepsilon/3 \leq s_\tau \leq I + \varepsilon/3$$

+

$$I - \varepsilon/3 \leq S_\tau \leq I + \varepsilon/3$$

$$\Rightarrow -2\varepsilon/3 \leq S_\tau - s_\tau \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$$

$\Leftarrow$

Имаме, че за всяко $\varepsilon > 0$ - фиксираме, съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и за всяко τ , $\delta_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

$$\Rightarrow \text{за всяко } \tau: s_{\tau} \leq \underline{I} \leq I' \leq S_{\tau}$$

$$1. \quad I' \leq S_{\tau}$$

$$2. \quad -\underline{I} \leq -s_{\tau}$$

$$\Rightarrow 0 \leq I' - \underline{I} \leq S_{\tau} - s_{\tau} \text{ (за всяко } \tau)$$

Ако допуснем, че $A = I' - \underline{I} < 0 \Rightarrow A > 0$

Нека $\varepsilon = A/2 \Rightarrow A = I' - \underline{I} \Rightarrow S_{\tau} - s_{\tau} < A/2$ (за някое τ)

$$\Rightarrow \delta = \delta(A/2) > 0 \text{ и за всяко } \tau, \delta_{(\tau)} = \delta > 0 \Rightarrow S_{\tau} - s_{\tau} < A/2 \text{ за всяко } c = \{c_i\}_{i=1}^n, \text{ такова че } c_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ за } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow s_{\tau} \leq \sigma_{\tau}(f; c) \leq S_{\tau}$$

+

$$-S_{\tau} \leq -I \leq -s_{\tau}$$

$$\Rightarrow |\sigma_{\tau}(f; c) - I| \leq S_{\tau} - s_{\tau}$$

$$\Rightarrow |\sigma_{\tau}(f; c) - I| < \varepsilon // \text{ условие за интегрируемост в Риманов смисъл.}$$

Свойство 1: $\int_a^b f(x) dx = b - a$, при $f(x) = 1$

Свойство 2: Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегрируеми върху интервала $[a, b]$, тогава :

1. $f(x) + g(x)$ - интегрируема върху интервала $[a, b]$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \text{ при } f(x) = 1$$

2. $df(x)$, $d \in \mathbb{R}$ е интегрируема върху интервала $[a, b]$

$$\int_a^b df(x) dx = d \int_a^b f(x) dx$$

Свойство 3: Ако $f(x) \geq 0$ и е интегрируема върху интервала $[a, b]$, тогава :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Свойство 4: Ако $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Свойство 5: Нека $f(x) \geq 0$ и е интегрируема върху интервала $[a, b]$, тогава :

1. $|f(x)|$ - интегрируема върху интервала $[a, b]$

$$2. \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Свойство 6: Нека $f(x)$ е интегрируема върху интервала $[a, b]$ и интервала $[c, d]$ е произволен подинтервал на $[a, b]$, за който

$[c, d] \subset [a, b]$, тогава $f(x)$ е интегрируема върху интервала $[c, d]$.

Свойство 7: Нека $f(x)$ е интегрируема върху интервала $[a, b]$ и $a < c < b$,

тогава:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Свойство 8: Ако $f(x)$ е интегрируема в интервала $[a, b]$ и ако m и M са съответно една нейна долна и една нейна горна граница в този интервал,

$$\text{то } m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

Th. Нека $f(x)$ е непрекъсната върху интервала $[a, b]$, тогава съществува поне една точка $c \in [a, b]$, за която е изпълнено равенството :

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

Доказателство: Да означим с m и M съответно точната долна и точната горна граница на $f(x)$ в интервала $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$

От свойство 8 обаче $\Rightarrow$

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a), \text{ или } m < \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq M$$

От непрекъснатостта на $f(x)$ $\exists$ две точки x_1 и x_2 от интервала $[a, b]$, за които $f(x_1)=m$ и $f(x_2)=M$.

И така точките x_1 и x_2 определят един интервал. Но всяка непрекъсната функция приема всички стойности между максимума и минимума си

$$\text{Следователно } \exists \text{ поне една } c \in [a, b], \text{ така че } f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

Теорема на Нютон-Лайбниц: Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в един интервал, то функцията $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ е деференцируема в този интервал и за всяко $x \in D$ е изпълнено равенството $F'(x)=f(x)$.

Док-во: Нека x е произволна точка от интервала D . Ако $x+h$ е друга точка от този интервал, то ще имаме

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right]}{h} = \frac{\left[\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right]}{h} =$$

$$= \frac{\left[\int_x^{x+h} f(t) dt \right]}{h} = \frac{f(c)(x+h-x)}{h} = f(c), c \in [x, x+h]$$

Ако $h \rightarrow 0$ следва $c \rightarrow x$,

$$\text{т.е. } F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x).$$

Начин за пресмятане на определен интеграл чрез теоремата на Лайбниц – Нютон :

Нека $f(x)$ е непрекъсната върху интервала $[a, b]$ и $\Phi(x)$ е примитивна ($\Phi(x)' = f(x)$) функция на $f(x)$ върху интервала $[a, b]$, тогава:

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^b$$

Док. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ - примитивна функция на $f(x)$ върху интервала $[a, b]$

$\Rightarrow$ От основната теорема на интегралното смятане $\Rightarrow$ съществува c – константа, такава че $\Phi(x) = F(x) + c$, за всяко $x \in [a, b]$

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

$$1. \ x = a \Rightarrow \Phi(a) = \int_a^a f(t) dt + c = 0 + c = c - \text{константа}$$

т.е. $\Phi(a)$ – константа

$$2. \ x = b \Rightarrow \Phi(b) = \int_a^b f(t) dt + \Phi(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (1)$$

Т.е. за да пресметнем определения интеграл трябва да пресметнем най-напред неопределения, т.е. да намерим една примитивна функция $\Phi(x)$ на f , след което да приложим формула (1).