



|                     |                                                                                       |   |                                                                |   |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------|---|
| симетрични матрици: | $AA^t = \begin{pmatrix} 1\theta & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -8 \\ 1 & -8 & 17 \end{pmatrix}$ | и | $A^tA = \begin{pmatrix} 21 & -1 \\ -1 & 1\theta \end{pmatrix}$ | . |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------------------------|---|

## Симетричен оператор - определение и основни свойства



- В тази страница ще се запознаем с:
- определение за симетричен оператор и основни примери;
  - свойството, че симетричните оператори образуват подпространство на пространството на всички линейни оператори
  - връзка между симетричен оператор в крайно-мерно пространство и симетрични матрици. Повече свойства на симетричните матрици са дадени в страницата симетрични матрици.
  - Задачи за симетричен оператор- зад.1, зад.2.

### Определение за симетричен оператор

Линейният оператор  $\varphi : E \rightarrow E$ , действащ в Евклидово пространство  $E$ , се нарича **симетричен**, ако за всеки два елемента  $x, y \in E$  е изпълнено равенството:

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$$

**Пример:** Във всяко Евклидово пространство нулевия и тъждествения оператор са тривиални примери на симетричен оператор.

### Свойство :

Нека  $\varphi$  и  $\psi$  са симетрични оператори в евклидово пространство  $E$ , тогава  $\varphi + \psi$  и  $\alpha \cdot \varphi$  също са симетрични оператори за произволно реално число  $\alpha$ .

**Доказателство:**  $((\alpha\varphi)(x), y) = (\alpha\varphi(x), y) = \alpha(\varphi(x), y) = \alpha(x, \varphi(y)) = (x, \alpha\varphi(y)) = (x, (\alpha\varphi)(y))$

$$((\varphi + \psi)(x), y) = (\varphi(x), y) + (\psi(x), y) = (x, \varphi(y)) + (x, \psi(y)) = (x, (\varphi + \psi)(y))$$

Това свойство ни задава, че множеството на всички симетрични оператори образува линейно подпространство на пространството от всички линейни оператори в едно Евклидово пространство.

**Пример:** В едномерно Евклидово пространство всеки линеен оператор може да се получи чрез умножаване на число по тъждествения оператор и следователно всеки линеен оператор в едномерно пространство е симетричен.

### Задача:



В  $n$ -мерно Евклидово пространство  $E$  са дадени два единични и ортогонални вектори  $a$  и  $b$ , т.е.  $|a| = 1$ ,  $|b| = 1$  и  $(a, b) = 0$  и изображението  $\varphi : E \rightarrow E$ , което е определено по следния начин :  $\varphi(x) = (a, x) \cdot b + (b, x) \cdot a$  за произволен вектор  $x \in E$ . Да се докаже, че  $\varphi$  е симетричен оператор в  $E$  и че  $\varphi^3 = \varphi$ .

Решение.....

### Задача за упражнение:



Нека  $\varphi$  и  $\psi$  са симетрични оператори действащи в евклидово пространство  $E$ . Да се докаже, че  $\varphi \circ \psi + \psi \circ \varphi$  е симетричен оператор.

## Връзка между симетрични оператори и симетрични матрици

### Теорема 1:

Нека  $E$  е крайномерно евклидово пространство и  $\varphi$  е симетричен оператор в  $E$ . Тогава  $\varphi$  има симетрична матрица в кой да е ортонормиран базис на  $E$ .

**Доказателство:**

Нека  $e_1, e_2, \dots, e_n$  е един ортонормиран базис на  $E \Rightarrow (e_i, e_j) = \begin{cases} 1, \text{ за } i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ , и нека  $\varphi$  има

матрица  $A = (a_{i,j})_{n \times n}$  в този базис.  $\Rightarrow \varphi(e_i) = a_{1,i}e_1 + a_{2,i}e_2 + \dots + a_{n,i}e_n = \sum_{k=1}^n a_{k,i}e_k$ .

$$(\varphi(e_i), e_j) = \left( \sum_k a_{k,i}e_k, e_j \right) = \sum_k a_{k,i}(e_k, e_j) = a_{j,i} \quad \text{и} \quad (e_i, \varphi(e_j)) = (\varphi(e_j), e_i) = a_{i,j}.$$

Тъй като  $\varphi$  е симетричен, то  $(\varphi(e_i), e_j) = (e_i, \varphi(e_j))$ . Така получаваме, че  $a_{i,j} = a_{j,i}$  за произволни индекси  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , т.е.  $A$  е симетрична матрица.

### Теорема 2

Нека  $E$  е крайномерно Евклидово пространство и  $e_1, e_2, \dots, e_n$  е ортонормиран базис

24. Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.

в  $E$ . Ако един линеен оператор  $\varphi: E \rightarrow E$  има симетрична матрица в  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , то оператора е симетричен.

Доказателство:

Нека  $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$  и  $y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$  са два произволни вектори от  $E$  и  $A = (a_{i,j})_{n \times n}$

е матрицата на  $\varphi$  в базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , тогава:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(x) = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n \quad \text{и} \quad A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(y) = \nu_1 e_1 + \dots + \nu_n e_n$$

Пресмятаме  $(\varphi(x), y)$  и  $(\varphi(y), x)$

$$(\varphi(x), y) = \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_n \beta_n = (\mu_1 \dots \mu_n) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \left( A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)^t \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\alpha \dots \alpha) \cdot A^t \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$(x, \varphi(y)) = \alpha_1 \nu_1 + \dots + \alpha_n \nu_n = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \cdot \left( A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \right) = (\alpha \dots \alpha) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$A$  е симетрична матрица  $\Rightarrow A = A^t$  откъдето получаваме че  $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$



Горните две теореми могат да се обединят в една по следния начин:

В крайномерно Евклидово пространство един линеен оператор е симетричен, тогава и само тогава когато матрицата му в кой да е ортонормиран базис е симетрична.

**Пример:** Спрямо стандартен ортонормиран базис на двумерното Евклидово пространство са дадени векторите  $a=(1,1)$  и  $b=(1,2)$ . Спрямо базиса  $a, b$  линейния оператор  $\varphi$  има матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Виждаме, че  $\varphi(a) = 1a + 1b = (2, 3)$  и  $(\varphi(a), b) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$ . Аналогично  $(a, \varphi(b)) = 2$  и операторът не е симетричен въпреки, че има симетрична матрица в един базис, който не е ортонормиран.

## Собствени вектори на симетричен оператор



Тази страница е посветена на доказателството на съществуване на канонизация при симетричните оператори и тя включва:

- Теорема 1, в която се доказва, че симетричните матрици имат реални характеристични корени;
- Теорема 2: даваща че за симетричен оператор собствените вектори с различни собствени стойности са ортогонални;
- Теорема за съществуването на каноничен вид на симетричен оператор;
- Основни следствия от теоремата за канонизацията

Начина за прилагане на канонизацията е показан на следващата страница...

За да се намерят собствените вектори на един линеен оператор трябва първо да бъдат определени неговите собствени стойности, т.е. за матрицата на оператора в кой да е базис трябва да се определят характеристичните корени на матрицата и собствени стойности на оператора са тези характеристични корени на матрицата, които са реални числа. Доказахме Теорема, от която имаме, че в ортонормиран базис матрицата на симетричен оператор е симетрична и затова ще определим какви могат да са корените на симетрична матрица.



**Характеристичен полином** на една квадратна матрица  $A$   $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$  е

Степента на характеристичния полином е равна на реда на матрицата и неговите корени се наричат **характеристични корени** на матрицата.

Известно е, че всеки полином с реални коефициенти има комплексни корени, но за реална симетрична матрица ще докажем, че всички характеристични корени са реални числа.

### Теорема 1.

Характеристичните корени на симетрична матрица с реални елементи са реални числа.

Доказателството е изнесено на следната страница..



Един **ненулев** вектор  $g$  се нарича **собствен вектор** за линейния оператор  $\varphi$ , когато съществува число  $\lambda$  (което се нарича **собствена стойност**), такова че:  $\varphi(g) = \lambda \cdot g$ .

Като следствие от теорема 1 непосредствено получаваме, че всеки симетричен оператор има собствени вектори.

### Теорема 2.

Нека  $\varphi$  е симетричен оператор в евклидовото пространство  $E$  и векторите  $a$  и  $b$  са собствени вектори за различни собствени стойности. Тогава  $a$  и  $b$  са ортогонални.

Доказателство:

24. Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.

Нека  $\varphi(a) = \lambda a$  и  $\varphi(b) = \mu b$ . Тогава е изпълнено  $\lambda \neq \mu$  и следователно:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\varphi(a), b) = (a, \varphi(b))}_{\downarrow} \\ & \underbrace{\lambda(a, b) = (\lambda a, b) = (a, \mu b) = \mu(a, b)}_{\downarrow} \\ & (\lambda - \mu) \cdot (a, b) = 0 \Rightarrow (a, b) = 0 \end{aligned}$$

За да докажем теоремата за канонизация на симетричен оператор, ще ни е нужна следната лема:

**Лема:**

Ако  $g$  е собствен вектор на симетричния оператор  $\varphi$  и  $h$  е вектор перпендикулярен на  $g$  тогава  $\varphi(h)$  също е перпендикулярен на  $g$ .

**Доказателство:**

Векторът  $g$  е собствен  $\Rightarrow \varphi(h)g = \lambda \cdot g$ . Тогава от  $(g, h) = 0$  имаме:

$$(g, \varphi(h)) = (\varphi(g), h) = (\lambda \cdot g, h) = \lambda (g, h) = 0$$

**Теорема. ( канонизация на симетричен оператор):**

За всеки симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство съществува ортонормиран базис от собствени вектори на оператора.

**Доказателство:**

Доказателството се провежда по идукция онтосно  $n$ , размерността на пространството  $E$

■  $n = 1 = \dim E$  и нека векторът  $e$  е единичен вектор от  $E$ . Този вектор сформира ортонормиран базис на пространството  $E$  и  $\varphi(e) = \lambda$ .  $\Rightarrow$  твърдението е вярно.

■ Нека твърдението е доказано за произволно  $(n - 1)$  - мерно евклидово пространство и нека  $E$  е произволно  $n$  - мерно евклидово пространство.

■ Нека  $\lambda_1$  е реален характеристичен корен на матрицата на оператора (такъв съществува според [Теорема 1](#)) и нека  $a$  е собствен вектор, за който  $\varphi(a) = \lambda_1 \cdot a$ .

■ Нека бележим с  $U$  множеството от всички вектори на  $E$ , които са ортогонални на  $a$ , т.е.  $U = \{ x \in E \mid (x, a) = 0 \}$ . За  $U$  имаме:

- $U$  е подпространство на  $E$  с размерност  $n - 1$  (пространството  $U$  е ортогонално допълнение на линейната обвивка на вектора  $a$ );
- В [Лемата](#) доказахме, че за всеки вектор  $x$  от  $U$  е изпълнено  $\varphi(x) \in U$ , следователно можем да резглеждаме  $\varphi$  също и като симетричен оператор действащ в пространството  $U$ .
- Съгласно индукционното предположение за  $U$  съществува ортонормиран базис  $e_1, \dots, e_{n-1}$  от собствени вектори на оператора  $\varphi$ .
- Нека  $e_n$  е единичен вектор получен чрез нормиране от  $a$ , тогава ясно е че векторите  $e_1, \dots, e_n$  образуват ортонормиран базис на  $E$  и всички те са собствени вектори за оператора  $\varphi$ . Следователно твърдението е вярно и за пространството  $E$ .

■ По индукция следва, че твърдението е вярно за произволно крайномерно евклидово пространство .

**Следствие 1:**

За всеки симетричен оператор съществува ортонормиран базис, спрямо който матрицата на оператора е диагонална. (това е базиса от собствени вектори на оператора)



Една квадратна матрица  $T$  се нарича **ортогонална**, когато нейната обратна съвпада с транспонираната и,  $T^{-1} = T^t$ .

В Евклидово пространство матрицата на прехода от един ортонормиран базис към друг ортонормиран базис е ортогонална матрица.

Непосредствено от формулата за смяна на матрицата на оператор при смяна на базиса получаваме следното:

**Следствие 2:**

За всяка симетрична матрица  $A$  съществува ортогонална матрица  $T$ , и диагонална матрица  $D$ , такава че  $D = T^{-1}AT$ .